Noen setninger om ubestemte likninger av formen

$$\frac{x^n - 1}{x - 1} = y^q.$$

Av
Wilhelm Ljunggren.

Man skylder *T. Nagell* (1) følgende sats:
Den ubestemte likning

$$\frac{x^n - 1}{x - 1} = y^2 \qquad (n > 2) \tag{1}$$

har bare et endelig antall løsninger i hele tall x og y. De eventuelle løsninger kan finnes etter et endelig arbeid. Spesielt er (1) umulig, hvis ikke n har en av følgende 4 former, idet $|x| > 1$: 1°. $n = 4$; 2°. $n = p$; 3°. $n = p^2$; 4°. $n = p^2q$, hvor p og q er ulike primtall, $q \equiv 1 \pmod{24p}$ og $q < p^2 - 3$.

Jeg skal først vise hvorledes man ved å anvende en sats av *K. Mahler* (1) kan oppnå følgende sluttsats om (1):

Sats 1. *Den ubestemte likning (1) er umulig i hele tall x, y $|x| > 1$, bortsett fra tilfellene $n = 4$, $x = 7$ og $n = 5$, $x = 3$.*

La D være et naturlig tall, som ikke er noe kvadrattall. La videre A være et kvadratfritt helt og rasjonalt tall som er divisor i $2D$ $(A \neq 0)$. Da er løsningen av likningen

$$x^2 - Dy^2 = A \tag{2}$$

gitt ved følgende formler

$$\pm x_m = \frac{(u + v\sqrt{D})^m + (u - v\sqrt{D})^m}{2|A|^{\frac{m-1}{2}}}$$

$$(m = 1, 3, 5, 7, 9, \text{ osv.})$$

$$\pm y_m = \frac{(u + v\sqrt{D})^m - (u - v\sqrt{D})^m}{2|A|^{\frac{m-1}{2}}\sqrt{D}}$$

Her er u og v naturlige tall som tilfredsstiller likning (2) med $|y|_{\text{min.}} = v$.

Den nevnte sats av Mahler gir oss et middel til å bestemme de eventuelle løsninger y av (2) som ikke er delelig med andre primfaktorer enn slike som finnes i D. Disse løsninger vil i tilfelle være gitt ved $m = 1$ eller ved $m = 1$ og $m = 3$.

Ifølge Nagell er det nok å betrakte ulike n. Vi forutsetter foreløbig $x > 1$. Likning (1) kan da skrives på formen

$$[(x-1)\,y]^2 - x\,(x-1)\left[x^{\frac{n-1}{2}}\right]^2 = -(x-1).$$

Her kan øyensynlig Mahlers sats anvendes. Vi har $D = x(x-1)$ og $A = -(x-1)$, og videre er $u = x - 1$ og $v = 1$. Dette gir

$$x^{\frac{n-1}{2}} = 1 \text{ (umulig) eller } x^{\frac{n-1}{2}} = 4x - 3.$$

For $x > 1$ følger av siste likning $x = 3$ med $n = 5$.

Anta dernest $x < -1$. Vi setter $x = -x_1$ med $x_1 > 1$. Likning (1) får da formen

$$\frac{x_1^n + 1}{x_1 + 1} = y^2, \quad \text{eller}$$

$$[(x_1 + 1)\,y]^2 - x_1\,(x_1 + 1)\left[x_1^{\frac{n-1}{2}}\right]^2 = x_1 + 1.$$

Herav følger $x_1^{\frac{n-1}{2}} = 1$ (umulig) eller $x_1^{\frac{n-1}{2}} = 4x_1 + 3$, som også er umulig for $x_1 > 1$. Sats 1 er dermed bevist.

La q betegne et vilkårlig primtall. Vi kan da bevise:

Sats 2. *Den ubestemte likning*

$$\frac{x^n - 1}{x - 1} = y^q \quad (n > 2) \tag{3}$$

er umulig i hele tall x, y med $|x| > 1$ dersom n er delelig med 3, bortsett fra tilfellet $n = 3$, $x = 18$ eller -19, $q = 3$.

T. Nagell (2) har bevist at denne setning er riktig for $q > 3$. For $q = 3$ følger satsen analogt av den kjensgjerning at likningen $x^2 + x + 1 = y^3$ ikke har andre løsninger x, y med $|x| > 1$ enn $x = 18$ eller -19. *Ljunggren (1)*. For $q = 2$ gjelder setningen på grunn av sats 1.

Sats 3. *Den ubestemte likning*

$$\frac{x^n - 1}{x - 1} = y^3 \quad (n > 2) \tag{4}$$

er umulig i hele tall x og y, $|x| > 1$, hvis $n \not\equiv -1 \pmod{6}$, bortsett fra tilfellet $n = 3$, $x = 18$ eller -19 og $y = 7$.

Bevis:

1° n delelig med 4. Setningen er da riktig ifølge *T. Nagell (2)*.

2° $n = 2m$, m ulike. Likning (4) kan da skrives

$$\frac{x^m - 1}{x - 1} \cdot (x^m + 1) = y^3.$$

Dette gir $\dfrac{x^m - 1}{x - 1} = \alpha^3$ og $x^m + 1 = \beta^3$.

Ifølge *T. Nagell (3)* er denne siste likning umulig for $|x| > 1$.

3° n delelig med 3. Setningen er da riktig etter sats 2.

4° $n = 6t + 1$. Vi skriver da likning (4) på formen

$$x\,(x^{2t})^3 - (x - 1)\,y^3 = 1.$$

Ifølge *T. Nagell (4)* har likningen $xh^3 - (x - 1)\,k^3 = 1$ for et gitt x bare løsningen $h = k = 1$. Herav følger $x^{2t} = 1$, hvilket er umulig.

Sats 4. *Den ubestemte likning*

$$\frac{x^{mq+1} - 1}{x - 1} = y^q \qquad (q > 3) \tag{5}$$

har for gitte m og q bare et endelig antall løsninger i hele tall x, y. De eventuelle løsninger kan finnes etter et endelig arbeid.

Bevis: Likningen (5) kan skrives

$$x\,(x^m)^q - (x - 1)\,y^q = 1.$$

Ifølge en sats av *C. L. Siegel (1)* har for et gitt x likningen

$$xh^q - (x - 1)\,k^q = 1$$

bare løsningen $h = k = 1$, dersom

$$[x\,(x - 1)]^{\frac{q}{2} - 1} \geqq 4q^{\frac{q^2}{q-1}}.$$

Det er følgelig mulig å angi et tall N som bare avhenger av q, slik at (5) er umulig for $x > N$, og satsen er dermed bevist.

Eks. $q = 5$. Man finner $N = 45$, og likningen

$$\frac{x^{5m+1} - 1}{x - 1} = y^5$$

er følgelig umulig for $x \geqq 46$.

Ljunggren, W. (1): Einige Bemerkungen über die Darstellung ganzer Zahlen durch binäre kubische Formen mit positiver Diskriminante. Acta mathematica, Bd. 75 (1942).

Mahler, K. (1): Über den grössten Primteiler spezieller Polynome zweiten Grades. Archiv for Math. og Naturv. B. XLI. Nr. 6 (1935).

Nagell, T. (1): Sur l'équation indéterminée $\frac{x^n - 1}{x - 1} = y^2$. Norsk Mat. Forenings Skrifter, Serie I, nr. 3 (1921).

(2): Note sur l'équation indéterminée $\frac{x^n - 1}{x - 1} = y^q$. Norsk Matem. Tidsskrift 1920 s. 75—78.

(3): Des équations indéterminées $x^2 + x + 1 = y^n$ et $x^2 + x + 1 = 3y^n$. Norsk Mat. Forenings Skrifter, Serie I, nr. 2 (1921).

(4): Solution complète de quelques équations cubiques à deux indéterminées. J. de Math., 9e serie, t. 4 (1925), s. 209—270.

Siegel, C. L. (1): Die Gleichung $ax^n - by^n = c$. Math. Ann. Bd. 114 (1937) S. 57—68.

Bokmeldinger.

R. Tambs Lyche: Lærebok i matematisk analyse, I, II og III. Tilsammen 907 sider. Pris kr. 75,00. Gyldendal Norsk Forlag 1940 og 1941.

Bind I er anmeldt i dette tidsskriftet før (se hefte 2—3, 1940): det handlet om funksjoner av én variabel.

Bind II behandler funksjoner av to eller flere variable og emner som har sammenheng med slike, framfor alt partielle deriverte og multiple integraler. For at leseren skal få det geometriske grunnlag for anskuelig forståelse av disse ting, innledes boka med avsnitt om determinanter og romgeometri, deriblant også vektorregning. Disse avsnitt inneholder ellers mye mer enn det som er nødvendig for analysen, og har derfor også selvstendig betydning. Teorien for romkurver finnes her, og teorien for krumme flater står under avsnittene om partielle deriverte. Til slutt er det et avsnitt om funksjoner av komplekse variable og konform avbildning.

Bind III handler om differensiallikninger. Her gjennomgås ikke bare de eksakte integrasjonsmetodene, hvis anvendelse i