# Topologický súčin

27. októbra 2020

# Topologický súčin

Štyri základné konštrukcie:

- podpriestor (vloženie)
- faktorový priestor (faktorové zobrazenie)
- topologický súčet
- **topologický súčin**

# Súčin dvoch množín

$$X_1 \times X_2 = \{(x_1, x_2); x_1 \in X_1, x_2 \in X_2\}$$

$p_1 : X_1 \times X_2 \to X_1$ a $p_2 : X_1 \times X_2 \to X_2$

$$p_1(x_1, x_2) = x_1$$
$$p_2(x_1, x_2) = x_2$$

Iné označenie: $p_A : A \times B \to A$, kde $p_A(a, b) = a$

# Súčin dvoch množín

Z $f_1 \colon X \to Y_1$ a $f_2 \colon X \to Y_2$ dostávame $g \colon X \to Y_1 \times Y_2$:

$$g(x) = (f_1(x), f_2(x)).$$

Označenie: $\langle f_1, f_2 \rangle$.

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[dl, "f_1"'] \arrow[d, "\langle f_1, f_2 \rangle"] \arrow[dr, "f_2"] & \\
Y_1 & Y_1 \times Y_2 \arrow[l, "p_1"'] \arrow[r, "p_2"] & Y_2
\end{tikzcd}$$

# Súčin dvoch množín

Ak máme $f_1 : X_1 \to Y_1$ a $f_2 : X_2 \to Y_2$:

$$f_1 \times f_2 : X_1 \times X_2 \to Y_1 \times Y_2$$
$$(f_1 \times f_2)(x_1, x_2) = (f_1(x_1), f_2(x_2))$$

$$\begin{tikzcd} X_1 \times X_2 \arrow[r, "f_1 \times f_2"] \arrow[d, "p_i"'] & Y_1 \times Y_2 \arrow[d, "p_i'"] \\ X_i \arrow[r, "f_i"'] & Y_i \end{tikzcd}$$

Ak $f_1$, $f_2$ sú injekcie (surjekcie, bijekcie), tak aj $f_1 \times f_2$ je injekcia (surjekcia, bijekcia).

# Súčin systému množín

## Definícia

Ak pre každé $i \in I$ máme danú množinu $X_i$ ich *karteziánsky súčin* definujeme ako množinu všetkých zobrazení z $I$ do $\bigcup\limits_{i \in I} X_i$ takých, že pre všetky $i \in I$ platí $f(i) \in X_i$.

$$\prod_{i \in I} X_i = \{f : I \to \bigcup_{i \in I} X_i ; (\forall i \in I) f(i) \in X_i\}$$

projekcie $p_i : \prod\limits_{i \in I} X_i \to X_i$:

$$p_i(f) = f(i)$$

# Súčin systému množín

Ak máme pre každé $i \in I$ zobrazenie $f_i \colon X \to Y_i$ tak dostaneme

$$\langle f_i \rangle \colon X \to \prod Y_i$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\langle f_i \rangle"] \arrow[dr, "f_i"'] & \prod Y_i \arrow[d, "p_i"] \\ & Y_i \end{tikzcd}$$

# Súčin systému množín

Ak máme pre každé $i \in I$ zobrazenie $f_i\colon X_i \to Y_i$, tak dostaneme

$$h = \prod_{i \in I} f_i\colon \prod_{i \in I} X_i \to \prod_{i \in I} Y_i$$

$$\begin{array}{ccc} \prod X_i & \xrightarrow{\prod f_i} & \prod Y_i \\ {\scriptstyle p_i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p_i'} \\ X_i & \xrightarrow[f_i]{} & Y_i \end{array}$$

Ak všetky $f_i$ sú injekcie (surjekcie, bijekcie), tak aj $\prod\limits_{i \in I} f_i$ je injekcia (surjekcia, bijekcia).

# Definícia súčinu

**Definícia**

Nech $(X_1, \mathcal{T}_1)$ a $(X_2, \mathcal{T}_2)$ sú topologické priestory. Položme

$$\mathcal{B} = \{U \times V; U \in \mathcal{T}_1, V \in \mathcal{T}_2\}.$$

Potom $\mathcal{B}$ je báza nejakej topológie $\mathcal{T}$ na karteziánskom súčine $X_1 \times X_2$. Túto topológiu nazývame *súčinová topológia* a priestor $(X_1 \times X_2, \mathcal{T})$ nazývame *topologický súčin* priestorov $(X_1, \mathcal{T}_1)$ a $(X_2, \mathcal{T}_2)$. Túto topológiu budeme niekedy označovať ako $\mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_2$.

$$\mathcal{B}' = \{U \times V; U \in \mathcal{B}_1, V \in \mathcal{B}_2\}$$

# Definícia súčinu

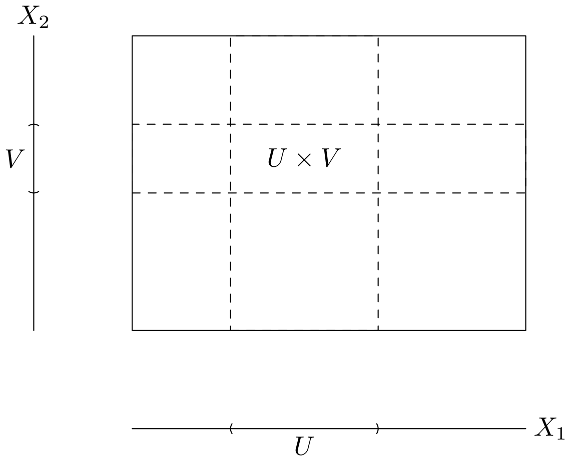


Figure: Bázovú množinu v súčinovej topológie dostaneme ako $U \times V$

# Príklady súčinov

- Súčin dvoch disktrétnych priestorov je disktrétny.
- Súčin dvoch indisktrétnych priestorov je indisktrétny.
- Súčin dvoch metrizovateľných priestorov je metrizovateľný.

$$d(x, y) = \max d(x_1, y_1), d(x_2, y_2)$$

# Projekcie sú spojité a otvorené

### Tvrdenie

*Nech $X_1 \times X_2$ je topologický súčin priestorov $X_1$ a $X_2$ a $p_i\colon X_1 \times X_2 \to X_i$ sú zodpovedajú projekcie. Zobrazenia $p_1$ a $p_2$ sú spojité a otvorené.*

# Projekcia nemusí byť uzavretá

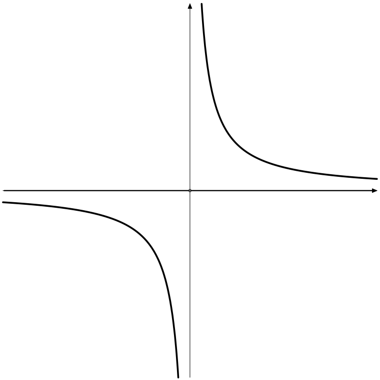

Figure: Projekcia nemusí byť uzavreté zobrazenie

# Spojitosť na súčine

## Tvrdenie

*Nech $Y$, $X_1$, $X_2$ sú topologické priestory. Zobrazenie $f\colon Y \to X_1 \times X_2$ je spojité práve vtedy, keď $p_1 \circ f$ aj $p_2 \circ f$ sú spojité.*

- $f_1\colon X \to Y_1$, $f_2\colon X \to Y_2$ spojité $\Rightarrow \langle f_1, f_2 \rangle$ spojité
- $f_1\colon X_1 \to Y_1$, $f_2\colon X_2 \to Y_2$ spojité $\Rightarrow f_1 \times f_2$ spojité

# Tórus

## Príklad

$$T = S \times S,$$

kde $S$ označuje kružnicu.
Faktorové zobrazenie $q\colon I \to S$, $q(t) = e^{i2\pi t}$ nám dáva

$$q \times q\colon I \times I \to S \times S.$$

$(x, y) \sim (x', y') \Leftrightarrow \exp(i2\pi x) = \exp(i2\pi x')$ a $\exp(i2\pi y) = \exp(i2\pi y')$.)

# Definícia súčinu

## Definícia

Nech pre každé $i \in I$ máme topologický priestor $(X_i, \mathcal{T}_i)$. Potom

$$\mathcal{S} = \{p_i^{-1}[U]; i \in I, U \in \mathcal{T}_i\}$$

určuje subbázu topológie na množine $X = \prod_{i \in I} X_i$. Označme túto topológiu $\mathcal{T}$.

Priestor $(X, \mathcal{T})$ budeme nazývať *topologický súčin* priestorov $(X_i, \mathcal{T}_i)$ a označovať ho budeme $\prod_{i \in I} X_i$.

V prípade, že $X_i = X$ pre všetky $i \in I$, budeme hovoriť o *mocnine* priestoru $X$ a používať označenie $X^I$.

# Definícia súčinu

$$\mathcal{S} = \{p_i^{-1}[U]; i \in I, U \in \mathcal{T}_i\}$$

$$\mathcal{B} = \{\bigcap_{i \in F} p_i^{-1}[U_i]; U_i \in \mathcal{T}_i, F \text{ je konečná podmnožina množiny } I\}$$

$$= \{\bigcap_{i_1}^{i_k} p_{i_1}^{-1}[U_{i_1}] \cap \cdots \cap p_{i_k}^{-1}[U_{i_k}]; i_1, \ldots, i_k \in I, U_{i_j} \in \mathcal{T}_{i_j}\}$$

# Definícia súčinu

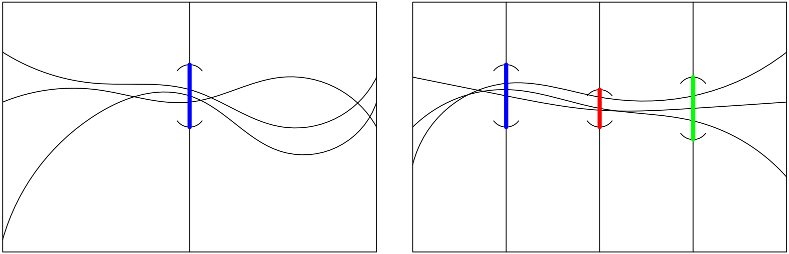

Figure: Obrázok znázorňuje typickú množinu zo subbázy (resp. bázy) spolu s niektorými funkciami patriacimi do tejto množiny

# Box topology

Nechceme $\bigcap\limits_{i\in I} p_i^{-1}[U_i] = \prod\limits_{i\in I} U_i$.

- súčin kompaktných priestorov
- univerzálna vlastnosť, kategoriálna limita
- iniciálna topológia vzhľadom na projekcie
- popis spojitosti
- konvergencia = bodová konvergencia

# Spojitosť

## Tvrdenie

*Nech $X_i$ je topologický priestor pre každé $i \in I$ a $\prod\limits_{i \in I} X_i$ je topologický súčin týchto priestorov. Pre každé $i \in I$ je projekcia $p_i\colon \prod\limits_{i \in I} X_i \to X_i$ spojité a otvorené zobrazenie.*

# Spojitosť

## Tvrdenie

*Nech $Y$ je topologický priestor a $X_i$ je topologický priestor pre každé $i \in I$. Nech $f\colon Y \to \prod_{i \in I} X_i$ je zobrazenie.*

*Zobrazenie $f$ je spojité práve vtedy, keď zloženie $p_i \circ f$ je spojité pre každé $i \in I$.*

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "p_i \circ f"'] & \prod X_i \arrow[d, "p_i"] \\ & X_i \end{tikzcd}$$

# Spojitosť

**Dôsledok**

*Nech pre každé $i \in I$ je $f_i \colon Y \to X_i$ spojité zobrazenie medzi topologickými priestormi. Potom aj $\langle f_i \rangle \colon Y \to \prod\limits_{i \in I} X_i$ je spojité.*

**Dôsledok**

*Nech pre každé $i \in I$ je $f_i \colon X_i \to Y_i$ spojité zobrazenie medzi topologickými priestormi. Potom aj $\prod\limits_{i \in I} f_i \colon \prod\limits_{i \in I} X_i \to \prod\limits_{i \in I} Y_i$ je spojité.*

# Univerzálna vlastnosť

## Tvrdenie

*Nech $X_i$ je topologický priestor pre každé $i \in I$, označme $\prod_{i\in I} X_i$ ich topologický súčin a $p_i\colon X \to X_i$ príslušné projekcie. Nech $Y$ je topologický priestor a nech pre každé $i \in I$ je $f_i\colon Y \to X_i$ spojité zobrazenie. Potom existuje práve jedno zobrazenie $\overline{f}\colon Y \to \prod_{i\in I} X_i$ s vlastnosťou, že rovnosť*

$$p_i \circ \overline{f} = f_i$$

*platí pre všetky $i \in I$.*

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, dashed, "\overline{f}"] \arrow[dr, "f_i"'] & \prod X_i \arrow[d, "p_i"] \\ & X_i \end{tikzcd}$$

# Spočítateľná báza

- Súčin spočítateľne veľa priestorov so spočítateľnou bázou topológie má spočítateľnú bázu topológie.
- Súčin spočítateľne veľa priestorov, ktoré vyhovujú prvej axióme spočítateľnosti, vyhovuje prvej axióme spočítateľnosti.

# Separabilný priestor

## Veta

*Nech pre každé $i \in I$ je $X_i$ separabilný priestor a $|I| \leq \mathfrak{c}$. Potom aj súčin $\prod_{i \in I} X_i$ je separabilný priestor.*

## Lema

*Nech $D$ je diskrétny priestor kardinality $\aleph_0$ a nech $I = \mathfrak{c}$. Potom mocnina $D^I$ je separabilný priestor.*