Cvičenie 6

Okruhy

1. Zistite (a svoje tvrdenie zdôvodnite) ktoré z uvedených vlastností sa z okruhu R prenesú na uvedené konštrukcie (I označuje ľubovoľný ideál v R, M je ľubovoľná množina):

	$R \times R$	R/I	R^M	podokruh	homomorfný obraz
pole					
obor integrity					
nemá delitele nuly					
má delitele nuly					
komutatívny okruh					
okruh s jednotkou					

2. Ak R je obor integrity a $x^2 = 1$, tak $x = 1$ alebo $x = -1$.

3. Dokážte, že $\{(r, r); r \in R\}$ je podokruh okruhu $R \times R$. Je tento podokruh izomorfný s okruhom R?

4. Zistite, ktoré z nasledujúcich zobrazení sú homomorfizmy medzi okruhom A všetkých matíc typu 2×2 s celočíselnými koeficientami a okruhom $\mathbb{Z}$.
   a) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto a$
   b) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto a + d$ (*stopa* matice)
   b) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto ad - bc$ (determinant matice)

5. Dokážte, že okruhy $(2\mathbb{Z}, +, \cdot)$ a $(3\mathbb{Z}, +, \cdot)$ nie sú izomorfné.

6. Prienik ľubovoľného systému podokruhov je podokruh. Prienik ľubovoľného systému ideálov je ideál.

7. Nech $X \neq \emptyset$ je ľubovoľná neprázdna množina. Dokážte, že potenčná množina $(P(X), \triangle, \cap)$ s operáciami $\triangle$ (symetrická diferencia množín) a $\cap$ (prienik množín) tvorí okruh. Nájdite izomorfizmus medzi týmto okruhom a okruhom $\mathbb{Z}_2^X$. (Poznámka: Bijekcia, ktorú nájdete v druhej časti, by sa dala použiť aj na dôkaz tvrdenia uvedeného v prvej časti.)

8. Okruh R sa volá boolovský okruh, ak pre každé $a \in R$ platí $a^2 = a$. Dokážte, že každý boolovský okruh je komutatívny. (Boolovským okruhom je napríklad okruh $(P(X), \triangle, \cap)$ z minulého cvičenia.)

9. Uvažujme grupu $(\mathbb{Z}_6, \oplus)$. Koľkými spôsobmi môžeme zvoliť operáciu $*$, tak aby $(\mathbb{Z}_6, \oplus, *)$ bol okruh? Koľko z týchto okruhov bude izomorfných?

10. Dokážte: Konečná pologrupa s krátením je grupa. Konečný obor integrity je pole.

11. Nech R je komutatívny okruh s jednotkou. Dokážte, že v ňom platí binomická veta
$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times a^k b^{n-k}.$$

12*. Nech $(R, +, \cdot)$ je okruh s jednotkou. Ak existuje inverzný prvok vzhľadom na operáciu $\cdot$ k $1 - ab$, tak existuje aj inverzný prvok k $1 - ba$.