Cvičenie 10.5.

Rozšírenia, minimálne polynómy

1. Nech L je rozšírenie poľa F a $u \in L$. Dokážte, že ak $[F(u) : F] = 5$, tak $F(u) = F(u^2)$.
2. Ak $[L : F]$ je prvočíslo, tak pre každé $u \in L$ platí $u \in F$ alebo $F(u) = L$.
3. Nech L je rozšírenie poľa F a $u \in L$. Dokážte, že ak stupeň $[F(u) : F]$ je nepárny, tak $F(u) = F(u^2)$.
4. Nájdite minimálne polynómy týchto čísel nad $\mathbb{Q}$:
   a) $\sqrt{2} + 1$; b) $\sqrt[3]{3} + \sqrt{3}$;
   c) $\sqrt[3]{2} + i$; d) $1 + \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4}$;
   e) $\sqrt[3]{7 - \sqrt{3}}$.
   Výsledky: [b) $x^6 - 9x^4 - 6x^3 + 27x^2 - 54x - 18$; d) $x^3 - 3x^2 + 9x - 5$; e) $(x^3 - 7)^2 - 3 = x^6 - 14x^3 + 46$;]
5. Určite stupeň viacnásobného rozšírenia a nájdite bázu nad $\mathbb{Q}$:
   a) $\mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{5})$; b) $\mathbb{Q}(i, \sqrt{2})$; c) $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{5}, \sqrt[3]{25})$; d) $\mathbb{Q}(1 + \sqrt{2}, 1 - \sqrt{8})$; e) $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5})$ (Hint: Môže platiť $\sqrt{5} = a + b\sqrt{3}$ pre nejaké $a, b \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$?); f) $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{3})$