



## *Lineárne zobrazenia a matice*

14. októbra 2012



## Sústavy lineárnych rovníc

### Definícia

Sústavou lineárnych rovníc rozumieme systém rovníc tvaru

$$\begin{aligned}a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= c_1 \\a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= c_2 \\&\dots \\a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= c_m\end{aligned}\tag{1}$$

kde  $a_{ij}, c_i \in F$  pre všetky prípustné hodnoty indexov  $i$  a  $j$ .

Riešenie sústavy lineárnych rovníc je  $n$ -tica  $(x_1, \dots, x_n)$  ktorá spĺňa všetky uvedené rovnice. Ak existuje aspoň jedno riešenie sústavy lineárnych rovníc, hovoríme, že táto sústava je *riešiteľná*. Skaláry  $c_1, \dots, c_n$  nazývame *pravé strany*,  $a_{ij}$  sú *koefficienty* a  $x_i$  sú *neznáme*.



## Matica sústavy

### Definícia

Maticu

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

nazývame *matica sústavy* (1).

Maticu

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & c_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & c_m \end{pmatrix}$$

nazývame *rozšírená matica sústavy* (1).



## Maticový zápis sústavy

$$A\vec{x}^T = \vec{c}^T$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}$$



## Sústavy a riadkové úpravy

### Veta

*Ak rozšírené matice dvoch sústav lineárnych rovníc sú riadkovo ekvivalentné, tak tieto dve sústavy majú rovnakú množinu riešení.*



## *Homogénne sústavy lineárnych rovníc*

*homogénna* sústava = pravé strany sú nulové

### *Veta*

*Množina všetkých riešení homogénnej sústavy lineárnych rovníc tvorí podpriestor priestoru  $F^n$ .*



## Homogénne sústavy lineárnych rovníc

$$\begin{aligned}x_1 + c_{1,r+1}x_{r+1} + c_{1,r+2}x_{r+2} + \dots + c_{1,n}x_n &= 0 \\x_2 + c_{2,r+1}x_{r+1} + c_{2,r+2}x_{r+2} + \dots + c_{2,n}x_n &= 0 \\&\dots \\x_r + c_{r,r+1}x_{r+1} + c_{r,r+2}x_{r+2} + \dots + c_{r,n}x_n &= 0\end{aligned}\tag{2}$$

$$\begin{aligned}\vec{\gamma}_{r+1} &= (-c_{1,r+1}, -c_{2,r+1}, \dots, -c_{r,r+1}, 1, 0, \dots, 0), \\ \vec{\gamma}_{r+2} &= (-c_{1,r+2}, -c_{2,r+2}, \dots, -c_{r,r+2}, 0, 1, \dots, 0), \\ &\dots \\ \vec{\gamma}_n &= (-c_{1,n}, -c_{2,n}, \dots, -c_{r,n}, 0, \dots, 0, 1).\end{aligned}\tag{3}$$



## Homogénne sústavy lineárnych rovníc

### Veta

Vektory  $\vec{\gamma}_{r+1}, \vec{\gamma}_{r+2}, \dots, \vec{\gamma}_n$  tvoria bázu priestoru riešení homogénnej sústavy (2).

### Dôsledok

Nech  $A$  je matica typu  $m \times n$  a  $S$  je priestor riešení homogénnej sústavy lineárnych rovníc s maticou  $A$ . Potom

$$d(S) = n - h(A).$$

### Dôsledok

Homogénna sústava lineárnych rovníc s  $n$  neznámymi, ktorej matica má hodnotu  $n$ , má len triviálne riešenie.



## Homogénne sústavy lineárnych rovníc

*Príklad*

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0.$$

*Príklad*

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\{(t, 0, -t); t \in \mathbb{R}\} = [(1, 0, -1)]$$



## *Podpriestor riešení*

### *Veta*

*Každý podpriestor priestoru  $F^n$  je množinou riešení nejakého homogénneho systému lineárnych rovníc.*



## Gaussova eliminačná metóda

### Príklad

$$\begin{array}{rclcrcl}
 x_1 & -2x_2 & +3x_3 & -4x_4 & = & 4 \\
 & x_2 & -x_3 & +x_4 & = & -3 \\
 x_1 & +3x_2 & & -3x_4 & = & 1 \\
 & -7x_2 & +3x_3 & +x_4 & = & 3
 \end{array}$$

$$\left( \begin{array}{cccc|c}
 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\
 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\
 1 & 3 & 0 & -3 & 1 \\
 0 & -7 & 3 & 1 & -3
 \end{array} \right) \sim \dots \sim \left( \begin{array}{cccc|c}
 1 & 0 & 0 & 0 & -8 \\
 0 & 1 & 0 & -1 & 3 \\
 0 & 0 & 1 & -2 & 6 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{array} \right)$$

$$x_4 = t \Rightarrow x_1 = -8, x_2 = t + 3, x_3 = 2t + 6.$$

Množina všetkých riešení:  $\{(-8, 3 + t, 6 + 2t, t); t \in \mathbb{R}\}$ .



## Frobeniova veta

### Veta

Pre každú maticu  $A$  nad poľom  $F$  platí  $h(A) = h(A^T)$ .

$$A = (\vec{\alpha}_1 \dots \vec{\alpha}_n)$$

$$A\vec{x}^T = \vec{0}^T \Leftrightarrow x_1\vec{\alpha}_1 + \dots + x_n\vec{\alpha}_n = \vec{0}$$

### Veta (Frobeniova)

Nehomogénna sústava lineárnych rovníc (1) je riešiteľná práve vtedy, keď matica sústavy a rozšírená matica sústavy majú rovnakú hodnotu, t.j.

$$h(A) = h(A').$$



## Riešenia homogénnej a nehomogénnej sústavy

### Veta

Nech  $\vec{\alpha}$  je riešenie sústavy lineárnych rovníc

$$A \cdot \vec{\alpha}^T = \vec{\gamma}^T \quad (N)$$

a  $S$  je podpriestor pozostávajúci zo všetkých riešení homogénneho systému

$$A \cdot \vec{\alpha}^T = \vec{0}^T. \quad (H)$$

Potom  $T = \{\vec{\alpha} + \vec{\beta}; \vec{\beta} \in S\}$  je množina všetkých riešení (N).



## Definícia

### Definícia

Nech  $V$  a  $W$  sú vektorové priestory nad poľom  $F$  a  $f: V \rightarrow W$  je lineárne zobrazenie. Potom *jadrom lineárneho zobrazenia  $f$*  nazývame množinu

$$\text{Ker } f = \{\vec{\alpha} \in V; f(\vec{\alpha}) = \vec{0}\}$$

a *obrazom lineárneho zobrazenia  $f$*  nazývame množinu

$$\text{Im } f = \{f(\vec{\alpha}); \vec{\alpha} \in V\}.$$



## Jadro a obraz

### *Tvrdenie*

*Nech  $V$  a  $W$  sú vektorové priestory nad poľom  $F$  a  $f: V \rightarrow W$  je lineárne zobrazenie. Potom  $\text{Ker } f$  je vektorový podpriestor priestoru  $V$  a  $\text{Im } f$  je vektorový podpriestor priestoru  $W$ .*

### *Tvrdenie*

*Nech  $V$  s  $W$  sú vektorové priestory nad poľom  $F$  a  $f: V \rightarrow W$  je lineárne zobrazenie.*

*Zobrazenie  $f$  je injektívne práve vtedy, keď  $\text{Ker } f = \{\vec{0}\}$ .*



## Jadro a obraz

### *Tvrdenie*

*Nech  $V$  a  $W$  sú vektorové priestory nad poľom  $F$  a  $f: V \rightarrow W$  je lineárne zobrazenie.*

*Zobrazenie  $f$  je surjektívne práve vtedy, keď  $\text{Im } f = W$ .*

### *Dôsledok*

*Lineárne zobrazenie  $f: V \rightarrow W$  je izomorfizmus práve vtedy, keď  $\text{Im } f = W$  a  $\text{Ker } f = \{\vec{0}\}$ .*





## *Dimenzia*

### *Veta*

*Nech  $V$  a  $W$  sú konečnorozmerné vektorové priestory a  $f: V \rightarrow W$  je lineárne zobrazenie. Potom*

$$d(V) = d(\text{Ker } f) + d(\text{Im } f).$$