

MATICE	RIADKOVÁ EKVIVALENCIA A HODNOSŤ MATICE	LINEÁRNE ZOBRAZENIA	SÚČIN MATÍC	INVERZNÁ MATICA
○ ○ ○ ○○	○ ○○○ ○○ ○○○○○○ ○○ ○○○○○ ○	○ ○○ ○ ○ ○ ○ ○	○○○○ ○○ ○ ○	○ ○○ ○ ○ ○

Lineárne zobrazenia a matice

14. októbra 2012



Definícia matice

Definícia

Maticou typu $m \times n$ nad poľom F nazývame ľubovoľnú tabuľku pozostávajúcu z prvkov poľa F , ktorá má m riadkov a n stĺpcov.

Matice zapisujeme v tvare

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

pričom a_{ij} označuje prvok v i -tom riadku a j -tom stĺpci.

Stručnejší zápis: $A = ||a_{ij}||$

Príklad

$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ je matica typu 2×3 nad \mathbb{R} .



Operácie s maticami

Definícia

Nech A, B sú matice typu $m \times n$ nad poľom F a $c \in F$.

(a) *Súčet matíc* $A = \|a_{ij}\|$ a $B = \|b_{ij}\|$ je matica

$$A + B = \|a_{ij} + b_{ij}\|.$$

(b) Matica $c.A = \|ca_{ij}\|$ sa nazýva *c-násobok* matice A .

(Teda sčítovanie matíc a násobenie matice skalárom definujeme po súradniciach.)

Veta

Matice typu $m \times n$ nad poľom F s takto definovaným sčítovaním a násobením skalármi tvoria vektorový priestor nad poľom F .



Jednotková matica

Definícia

Maticu typu $n \times n$ (teda takú, ktorá má rovnaký počet riadkov a stĺpcov) nazývame *štvorcová matica*.

Maticu

$$I = I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

typu $n \times n$ nazývame *jednotková matica*.

Štvorcová matica, ktorá má mimo diagonály iba nuly (t.j. $a_{ij} = 0$ pre $i \neq j$) sa nazýva *diagonálna matica*.



Transponovaná matica

Definícia

Transponovaná matica k matici A typu $m \times n$ je matica A^T typu $n \times m$ určená ako

$$A^T = \|a_{ji}\|.$$

Štvorcová matica A sa nazýva *symetrická*, ak $A = A^T$ a *antisymetrická*, ak $A = -A^T$.

$$I^T = I, (A^T)^T = A, (A + B)^T = A^T + B^T \text{ a } (cA)^T = cA^T$$



Transponovaná matica

Príklad

Ak $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$, tak $A^T = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$

Matica $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ je symetrická, matica $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ je antisymetrická.



Podpriestor prislúchajúci matici

Definícia

Podpriestorom prislúchajúcim matici A typu $m \times n$ nad poľom F nazývame podpriestor priestoru F^n generovaný riadkami matice A . Označujeme ho V_A .

Príklad

Nad poľom \mathbb{R} :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad V_A = [(1, 0, 1), (0, 1, 1)]$$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad V_I = [(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)] = \mathbb{R}^3$$

Vidíme, že jednotkovej matici I zodpovedá štandardná báza priestoru \mathbb{R}^3 , preto jej prislúcha celý priestor \mathbb{R}^3 .



Riadková ekvivalencia matíc

Definícia

Elementárne riadkové operácie na matici A nad poľom F sú:

1. výmena 2 riadkov matice,
2. vynásobenie niektorého riadku matice nenulovým prvkom c poľa F ,
3. pripočítanie násobku niektorého riadku k inému riadku.

Hovoríme, že matice A a B sú *riadkovo ekvivalentné* ak maticu B možno z A dostať pomocou konečnej postupnosti elementárnych riadkových operácií. Ak matice A a B sú riadkovo ekvivalentné, zapisujeme to ako $A \sim B$.



Riadková ekvivalencia matíc

Príklad

Nasledujúce matice sme dostali z prvej pomocou elementárnych riadkových operácií. Sú to teda riadkovo ekvivalentné matice.

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & -2 & 1 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -6 & -9 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -6 & -9 \\ 0 & -8 & -12 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \sim \\
 &\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Podobne sa dajú definovať aj elementárne stĺpcové operácie.

Poznámka

$$A \sim B \wedge B \sim C \Rightarrow A \sim C$$

$$A \sim B \Rightarrow B \sim A$$



Riadková ekvivalencia matíc

Veta

Elementárne riadkové operácie nemenia podpriestor prislúchajúci danej matici. (Teda riadkovo ekvivalentným maticiam zodpovedá rovnaký podpriestor.)



Redukovaná trojuholníková matica

Definícia

Matica A je *redukovaná trojuholníková matica*, ak:

- (i) Vedúci (= prvý nenulový) prvok každého riadku matice je 1.
- (ii) Každý stĺpec obsahujúci vedúci prvok niektorého riadku má prvky v ostatných riadkoch nulové.
- (iii) Nulové riadky ležia pod nenulovými riadkami.
- (iv) Vedúci prvok ľubovoľného nenulového riadku je napravo od vedúcich prvkov všetkých nenulových riadkov nad ním a naľavo od vedúcich prvkov riadkov pod ním (t.j. vedúce riadky sú usporiadané zľava doprava).

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



Redukovaná trojuholníková matica

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \boxed{1} & * & 0 & * & 0 & * & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & * & 0 & * & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & * & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$



Redukovaná trojuholníková matica

Veta

Každá matica nad pol'om F je riadkovo ekvivalentná s nejakou redukovanou trojuholníkovou maticou.

Nech $A \neq 0$.

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{1s} & * & * & * & a_{1n} \\ 0 & \dots & 0 & * & * & * & * & * \\ 0 & \dots & 0 & a_{ks} \neq 0 & * & * & * & a_{kn} \\ 0 & \dots & 0 & * & * & * & * & * \\ 0 & \dots & 0 & a_{m+1,s} & * & * & * & a_{m+1,n} \end{pmatrix}$$



Redukovaná trojuholníková matica

Výmena riadkov:

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & b_{1s} \neq 0 & * & * & * & * \\ 0 & \dots & 0 & b_{2s} & * & * & * & * \\ 0 & \dots & 0 & \vdots & * & * & * & * \\ 0 & \dots & 0 & b_{ks} & * & * & * & * \\ 0 & \dots & 0 & \vdots & * & * & * & * \\ 0 & \dots & 0 & b_{m+1,s} & * & * & * & * \end{pmatrix}$$



Redukovaná trojuholníková matica

b_{1s}^{-1} -násobok prvého riadku:

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & * & * & * & * \\ 0 & \dots & 0 & b_{2s} & * & * & * & * \\ 0 & \dots & 0 & \vdots & * & * & * & * \\ 0 & \dots & 0 & b_{ks} & * & * & * & * \\ 0 & \dots & 0 & \vdots & * & * & * & * \\ 0 & \dots & 0 & b_{m+1,s} & * & * & * & * \end{pmatrix}$$



Redukovaná trojuholníková matica

Vynulujeme prvky v s -tom stĺpci:

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & * & * & * & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & c_{2,s+1} & \dots & \dots & c_{2,n} \\ 0 & \dots & 0 & \vdots & * & * & * & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & c_{k,s+1} & \dots & \dots & c_{k,n} \\ 0 & \dots & 0 & \vdots & * & * & * & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & c_{m+1,s+1} & \dots & \dots & c_{m,n} \end{pmatrix}$$



Redukovaná trojuholníková matica

Indukčný predpoklad:

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & * & * & * & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & * & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & * & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



Redukovaná trojuholníková matica

Vynulujeme príslušné prvky v prvom riadku:

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & * & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & * & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & * & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



Hodnosť matice

Veta

Nenulové riadky redukovanej trojuholníkovej matice sú lineárne nezávislé.

Príklad

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Riadky: $\vec{\alpha} = (1, 0, 2)$ a $\vec{\beta} = (0, 1, \frac{3}{2})$.

Rovnosť $c\vec{\alpha} + d\vec{\beta} = \vec{0}$ znamená

$c(1, 0, 2) + d(0, 1, \frac{3}{2}) = (c, d, 2c + \frac{3}{2}d) = (0, 0, 0)$, z čoho dostaneme (porovnaním prvých 2 súradníc) $c = 0$ a $d = 0$.

Vektory $\vec{\alpha}$ a $\vec{\beta}$ sú lineárne nezávislé.



Hodnosť matice

Definícia

Hodnosť matice A je dimenzia podpriestoru V_A prislúchajúceho tejto matici. Označujeme ju $h(A)$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & -2 & 1 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix} \sim B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$V_A = V_B$$

$$h(A) = h(B) = 2$$

MATICE	RIADKOVÁ EKVIVALENCIA A HODNOSTĚ MATICE	LINEÁRNĚ ZOBRAZENIA	SÚČIN MATÍC	INVERZNÁ MATICA
○ ○ ○ ○ ○○	○ ○○ ○○ ○○○○○ ○○ ●○○○ ○	○ ○○ ○ ○ ○ ○ ○ ○	○○○○ ○○ ○ ○	○ ○○ ○ ○ ○

Riadková ekvivalencia a podpriestor V_A

Príklad

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & -2 & 1 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix} \sim B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow V_A = V_B = \left[(1, 0, 2), (0, 1, \frac{3}{2}) \right].$$

Otázka: $\vec{\alpha} = (1, 4, 4) \in V_A?$

$$(1, 4, 4) = c_1(1, 0, 2) + c_2(0, 1, \frac{3}{2}) = (c_1, c_2, 2c_1 + \frac{3}{2}c_2).$$

Porovnaním prvých dvoch súradníc dostaneme $c_1 = 1$ a $c_2 = 4$. Vektor na pravej strane poslednej rovnice má potom ale tretiu súradnicu rovnú $2 \cdot 1 + \frac{3}{2} \cdot 4 = 8 \neq 4$, čiže vektor $\vec{\alpha}$ nepatrí do V_A .

MATICE	RIADKOVÁ EKVIVALENCIA A HODNOSTĚ MATICE	LINEÁRNE ZOBRAZENIA	SÚČIN MATÍC	INVERZNÁ MATICA
○ ○ ○ ○ ○○	○ ○ ○○ ○○ ○○○○○ ○○ ○●○○○ ○	○ ○○ ○ ○ ○ ○ ○ ○	○○○○ ○○ ○ ○ ○	○ ○○ ○ ○ ○

Riadková ekvivalencia a podpriestor V_A

Lema

Nech A je redukovaná trojuholníková matica typu $m \times n$ nad poľom F . Označme jej nenulové riadky $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_k$ a ako i_1, \dots, i_k označme čísla stĺpcov, v ktorých sú vedúce jednotky. Potom

$\vec{\alpha} = (c_1, \dots, c_n) \in V_A$ práve vtedy, keď

$$\vec{\alpha} = c_{i_1} \vec{\alpha}_1 + c_{i_2} \vec{\alpha}_2 + \dots + c_{i_k} \vec{\alpha}_k.$$

MATICE	RIADKOVÁ EKVIVALENCIA A HODNOSŤ MATICE	LINEÁRNE ZOBRAZENIA	SÚČIN MATÍC	INVERZNÁ MATICA
○ ○ ○ ○ ○○	○ ○○ ○○ ○○○○○ ○○ ○○●○○ ○	○ ○○ ○ ○ ○ ○ ○	○○○ ○○ ○ ○	○ ○○ ○ ○ ○

Riadková ekvivalencia a podpriestor V_A

Veta

Ak A a B sú redukované trojuholníkové matice rovnakého typu $m \times n$ nad poľom F a $V_A = V_B$, tak $A = B$.

Riadková ekvivalencia a podpriestor V_A

Príklad

Majme redukovanú trojuholníkovú maticu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

ktorá má vedúce jednotky v prvom a treťom stĺpci.

Keby platilo $V_A = V_B$ pre

$$B = \begin{pmatrix} 1 & b_{12} & b_{13} & 0 & b_{15} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & b_{25} \end{pmatrix}$$

tak $(0, 0, 1, 1, 2) \in V_B$, a teda

$(0, 0, 1, 1, 2) = 0 \cdot (1, b_{12}, b_{13}, 0, b_{15}) + 1 \cdot (0, 0, 0, 1, b_{25})$, čiže

$(0, 0, 1, 1, 2) = (0, 0, 0, 1, b_{25})$, spor.



Riadková ekvivalencia a podpriestor V_A

Dôsledok

Nech A a B sú matice typu $m \times n$ nad poľom F . Nasledovné podmienky sú ekvivalentné:

- (i) A a B sú riadkovo ekvivalentné,*
- (ii) $V_A = V_B$,*
- (iii) A a B sú riadkovo ekvivalentné s tou istou redukovanou trojuholníkovou maticou.*

Hľadanie chyby v úpravách

Dokázané výsledky môžeme použiť na „polovičnú skúšky správnosti“ pri počítaní RTM.

Vieme však ľahko overiť, či $V_A \subseteq V_B$, ak B je RTM.

Ak nám takáto „poloskúška“ nevyjde vieme dokonca pomerne jednoducho nájsť poslednú úpravu od konca, v ktorej sme spravili chybu.

$$\text{Postup s chybou: } \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & -4 & -4 \end{pmatrix} \stackrel{(1)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & 2 \\ 0 & 4 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{2} & -\frac{5}{2} \end{pmatrix} \stackrel{(2)}{\sim}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & 2 \\ 0 & 4 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \stackrel{(3)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \stackrel{(4)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \stackrel{(5)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

MATICE	RIADKOVÁ EKVIVALENCIA A HODNOSŤ MATICE	LINEÁRNE ZOBRAZENIA	SÚČIN MATÍC	INVERZNÁ MATICA
○ ○ ○ ○○	○ ○○ ○○ ○○○○○ ○○ ○○○○○ ○	● ○○ ○ ○ ○ ○ ○	○○○○ ○○ ○ ○	○ ○○ ○ ○

Definícia

Definícia

Ak V a W sú vektorové priestory nad poľom F a $f: V \rightarrow W$ je zobrazenie z V do W , tak hovoríme, že f je *lineárne zobrazenie*, ak pre ľubovoľné $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \in V$ a ľubovoľné $c \in F$ platí

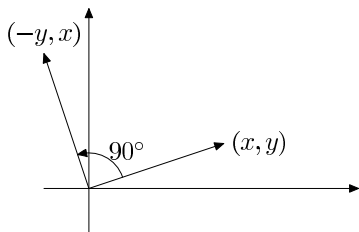
- (i) $f(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) = f(\vec{\alpha}) + f(\vec{\beta})$,
- (ii) $f(c\vec{\alpha}) = cf(\vec{\alpha})$.



Príklady

Príklad

Otočenie v rovine o 90° je lineárne zobrazenie.



$$f(x, y) = (-y, x)$$



Príklady

Príklad

Zobrazenie $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ určené predpisom
 $f(x, y) = (2x + y, x + 3y)$ je lineárne zobrazenie.



Ekvivalentná podmienka

Veta

Nech V, W sú vektorové priestory nad poľom F a $f: V \rightarrow W$ je zobrazenie. Nasledujúce podmienky sú ekvivalentné:

- (a) zobrazenie f je lineárne,
- (b) $f(c\vec{\alpha} + d\vec{\beta}) = cf(\vec{\alpha}) + df(\vec{\beta})$ pre ľubovoľné $c, d \in F$ a ľubovoľné $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \in V$,
- (c) $f(c_1\vec{\alpha}_1 + \dots + c_n\vec{\alpha}_n) = c_1f(\vec{\alpha}_1) + \dots + c_nf(\vec{\alpha}_n)$ pre ľubovoľné $c_1, \dots, c_n \in F, \vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n \in V$.

○
○
○
○○

○
○○○
○○
○○○○○
○○
○○○○○
○

○
○○
○
○
●
○
○

○○○○
○○
○
○

○
○○
○
○
○

Vlastnosti lineárnych zobrazení

Tvrdenie

Ak f je lineárne zobrazenie, tak $f(\vec{0}) = \vec{0}$.

Veta

Nech V, W sú vektorové priestory. Nech $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n$ je báza priestoru V a nech $\vec{\beta}_1, \dots, \vec{\beta}_n \in W$. Potom existuje práve jedno lineárne zobrazenie $f: V \rightarrow W$ také, že

$$f(\vec{\alpha}_i) = \vec{\beta}_i$$

pre $i = 1, 2, \dots, n$.



Matica lineárneho zobrazenia

Štandardná báza v F^n :

$$\vec{\varepsilon}_1 = (1, 0, \dots, 0), \vec{\varepsilon}_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, \vec{\varepsilon}_n = (0, \dots, 0, 1).$$

Definícia

Nech F je pole. *Matica lineárneho zobrazenia* $f: F^m \rightarrow F^n$ je matica typu $m \times n$ ktorej k -ty riadok je vektor $f(\vec{\varepsilon}_k)$.

Maticu zobrazenia f budeme označovať A_f .

Maticou typu $m \times n$ je jednoznačne určené lineárne zobrazenie $f: F^m \rightarrow F^n$. Budeme ho označovať f_A .



Matica lineárneho zobrazenia

Príklad

Uvažujme lineárne zobrazenie $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dané predpisom $f(x, y) = (2x + y, x + y, x + 2y)$. Dosadením zistíme, že platí

$$f(\vec{\varepsilon}_1) = f(1, 0) = (2, 1, 1)$$

$$f(\vec{\varepsilon}_2) = f(0, 1) = (1, 1, 2)$$

Teda matica tohoto zobrazenia je

$$A_f = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

MATICE	RIADKOVÁ EKVIVALENCIA A HODNOSŤ MATICE	LINEÁRNE ZOBRAZENIA	SÚČIN MATÍC	INVERZNÁ MATICA
○ ○ ○ ○ ○○	○ ○○○ ○○ ○○ ○○○○○ ○○ ○○○○○ ○	○ ○○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ●	○○○○ ○○ ○ ○ ○	○ ○ ○○ ○ ○

Zloženie lineárnych zobrazení

Veta

Nech U, V, W sú vektorové priestory nad tým istým poľom F . Ak $f: U \rightarrow V$ a $g: V \rightarrow W$ sú lineárne zobrazenia, tak aj $g \circ f$ je lineárne zobrazenie.

Poznámka

Ľahko sa overí, že ak $f, g: V \rightarrow W$ sú lineárne zobrazenia, tak aj zobrazenia $f + g$ a $c \cdot f$ sú lineárne.



Definícia súčinu matíc

Príklad

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad g \circ f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$A_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad A_g = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad A_{g \circ f} = ?$$

$$g(f(\vec{\delta}_1)) = g(1, 0, 2) = g(\vec{e}_1 + 2\vec{e}_3) =$$

$$= g(\vec{e}_1) + 2g(\vec{e}_3) = (3, 1) + 2 \cdot (0, -1) = (3, -1)$$

$$g(f(\vec{\delta}_2)) = g(2, 1, 1) = g(2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3) = 2g(\vec{e}_1) + g(\vec{e}_2) + g(\vec{e}_3) =$$

$$= 2 \cdot (3, 1) + (1, 1) + (0, -1) = (7, 2)$$

$$A_{g \circ f} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$$



Definícia súčinu matíc

$$\begin{array}{ccc}
 f: F^m \rightarrow F^n & g: F^n \rightarrow F^k & g \circ f: F^m \rightarrow F^k \\
 A_f = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} & A_g = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nk} \end{pmatrix} & A_{g \circ f} = ?
 \end{array}$$

MATICE	RIADKOVÁ EKVIVALENCIA A HODNOSTĚ MATICE	LINEÁRNE ZOBRAZENIA	SÚČIN MATÍC	INVERZNÁ MATICA
○ ○ ○ ○ ○○	○ ○○ ○○ ○○○○○ ○○ ○○○○○ ○	○ ○○ ○ ○ ○ ○ ○	○○●○ ○○ ○ ○ ○	○ ○○ ○ ○ ○

Definícia súčinu matic

$$\begin{aligned}
 g(f(\vec{\delta}_i)) &= g(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}) = \\
 g(a_{i1}\vec{e}_1 + a_{i2}\vec{e}_2 + \dots + a_{in}\vec{e}_n) &= g(a_{i1}\vec{e}_1) + g(a_{i2}\vec{e}_2) + \dots + g(a_{in}\vec{e}_n) = \\
 & a_{i1}(b_{11}, b_{12}, \dots, b_{1k}) + \\
 & a_{i2}(b_{21}, b_{22}, \dots, b_{2k}) + \\
 & \vdots \\
 & a_{in}(b_{n1}, b_{n2}, \dots, b_{nk}) = \\
 (a_{i1}b_{11} + a_{i2}b_{21} + \dots + a_{in}b_{n1}, & a_{i1}b_{12} + a_{i2}b_{22} + \dots + a_{in}b_{n2}, \dots, a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \dots + a_{in}b_{nk})
 \end{aligned}$$



Definícia súčinu matíc

Definícia

Ak A je matica typu $m \times n$ a B je matica typu $n \times k$ nad pol'om F , tak maticu $C = \|\|c_{ij}\|\|$ typu $m \times k$, kde

$$c_{ij} = \sum_{t=1}^n a_{it} b_{tj}$$

pre $i = 1, 2, \dots, m$ a $j = 1, 2, \dots, k$, nazývame *súčin matíc* A a B . Označujeme ju $A.B$.

$$m \times \boxed{n \quad n} \times k$$



Vlastnosti súčinu matíc

Veta

Nech F je pole, $f: F^m \rightarrow F^n$ a $g: F^n \rightarrow F^k$ sú lineárne zobrazenia.

Potom platí

$$A_{g \circ f} = A_f \cdot A_g$$

Dôsledok

Násobenie matíc je asociatívne, teda

$$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$$

pre ľubovoľné matice také, že ich možno násobiť v uvedenom poradí.



Vlastnosti súčinu matíc

Veta

Nech matice A , B , C nad poľom F sú majú také rozmery, že uvedené súčty a súčiny majú zmysel.

$$I_m A = A = A I_n$$

$$A(B + C) = AB + AC$$

$$(B + C)D = BD + CD$$



Lineárne zobrazenia a súčin matíc

$$f: F^m \rightarrow F^n$$

$$f(\vec{\alpha}) = \vec{\alpha} \cdot A_f$$

$$\vec{\alpha} \cdot A = (a_1, \dots, a_m) \cdot \begin{pmatrix} \vec{\alpha}_1 \\ \vdots \\ \vec{\alpha}_m \end{pmatrix} = a_1 \vec{\alpha}_1 + \dots + a_m \vec{\alpha}_m =$$

$$a_1 f(\vec{\epsilon}_1) + \dots + a_n f(\vec{\epsilon}_n) = f(a_1 \vec{\epsilon}_1 + \dots + a_n \vec{\epsilon}_n) = f(a_1, \dots, a_n) = f(\vec{\alpha}).$$



Lineárne zobrazenia a súčin matíc

Všimnime si, že

$$g(f(\vec{\alpha})) = g(\vec{\alpha}A_f) = \vec{\alpha}(A_fA_g),$$

čiže

$$A_{g \circ f} = A_f A_g.$$

$$(AB)^T = B^T A^T$$



Inverzné zobrazenie

$g: Y \rightarrow X$ je inverzné k $f: X \rightarrow Y$, ak

$$g \circ f = id_X$$

$$f \circ g = id_Y$$

Označujeme: $g = f^{-1}$.

Inverzné zobrazenie f^{-1} existuje $\Leftrightarrow f$ je bijekcia.

Veta

Ak $f: V \rightarrow W$ je lineárne zobrazenie a existuje inverzné zobrazenie $f^{-1}: W \rightarrow V$, tak f^{-1} je lineárne zobrazenie.



Bijektivnosť lineárneho zobrazenia

Lema

Nech $f: V \rightarrow W$ je lineárne zobrazenie a $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n$ je báza V .

- (i) Zobrazenie f je injekcia \Leftrightarrow vektory $f(\vec{\alpha}_1), \dots, f(\vec{\alpha}_n)$ sú lineárne nezávislé.
- (ii) Zobrazenie f je surjekcia $\Leftrightarrow [f(\vec{\alpha}_1), \dots, f(\vec{\alpha}_n)] = W$ (teda ak $f(\vec{\alpha}_1), \dots, f(\vec{\alpha}_n)$ generujú W).

Veta

Nech $f: V \rightarrow W$ je lineárne zobrazenie a $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n$ je báza priestoru V . Zobrazenie f je bijekcia práve vtedy, keď vektory $f(\vec{\alpha}_1), \dots, f(\vec{\alpha}_n)$ tvoria bázu vektorového priestoru W .



Bijektivnosť lineárneho zobrazenia

Dôsledok

Nech $f: F^n \rightarrow F^n$ je lineárne zobrazenie. Nasledujúce podmienky sú ekvivalentné:

- (i) f je bijekcia,
- (ii) f je prosté,
- (iii) f je surjektívne.

Dôsledok

Nech $f: F^n \rightarrow F^n$ je lineárne zobrazenie. Nasledujúce podmienky sú ekvivalentné:

- (a) zobrazenie f je bijekcia,
- (b) existuje inverzné zobrazenie f^{-1} ,
- (c) $h(A_f) = n$.

○
○
○
○
○○

○
○○
○○
○○
○○○○○
○○
○○○○○
○

○
○○
○
○
○
○
○

○○○○
○○
○
○

○
○○
●
○
○

Definícia

Definícia

Nech A je matica typu $n \times n$. Hovoríme, že matica B je *inverzná* k matici A , ak platí

$$AB = BA = I_n.$$

Označujeme ju $B =: A^{-1}$.

Inverzná matica = matica inverzného zobrazenia.

Poznámka

Pre štvorcové matice platí:

$$AB = I \Rightarrow BA = I$$

○
○
○
○○

○
○○○
○○
○○○○○
○○
○○○○○
○

○
○○
○
○
○
○
○

○○○○
○○
○
○

○
○○
○
●
○

Regulárna matica

Definícia

Štvorcová matica typu $n \times n$ sa nazýva *regulárna*, ak $h(A) = n$.

Veta

Nech A je matica typu $n \times n$. K matici A existuje inverzná matica práve vtedy, keď A je regulárna.

○
○
○
○○

○
○○○
○○
○○○○○
○○
○○○○○
○

○
○○
○
○
○
○
○

○○○○
○○
○
○

○
○○
○
○
●

Izomorfizmus

Definícia

Bijektívne lineárne zobrazenie $f: V \rightarrow W$ nazývame *izomorfizmus vektorových priestorov* V a W (alebo tiež *lineárny izomorfizmus*). Ak existuje bijektívne zobrazenie $f: V \rightarrow W$, hovoríme, že vektorové priestory V a W sú izomorfné. Fakt, že V a W sú izomorfné označujeme $V \cong W$.

Dôsledok

Ak V , W sú konečnorozmerné vektorové priestory a $V \cong W$, tak $d(V) = d(W)$.

Veta

Nech V je vektorový priestor nad poľom F a $d(V) = n$. Potom V je izomorfný s priestorom F^n .