

D.Ú.-sada 6

1. Dokážte, že pre prirodzené čísla m, n také, že $(m, n) = 1$ platí $(M_m, M_n) = 1$, kde $M_k = 2^k - 1$ je k -te Mersennove číslo. Ako z toho vyplýva nekonečnosť množiny všetkých prvočísel?
2. Dokážte, že prirodzené číslo $n > 1$, ktorého desiatkový zápis pozostáva zo samých jednotiek, nemôže byť štvorcom prirodzeného čísla.
3. Dokážte, že $\prod_{t|n} t = n^{d(n)/2}$.
4. Zistite, či sú riešiteľné kongruencie a) $x^2 + 5x \equiv 12 \pmod{31}$, b) $x^2 \equiv 19 \pmod{30}$.
5. Dokážte, že ak $p = 4k + 1$, tak $\sum_{\substack{a=1 \\ (a|p)=1}}^{p-1} a = \frac{p(p-1)}{4}$.