D.Ú.–sada 9

1. Dokážte, že pre prirodzené čísla m, n také, že $(m,n)=1$ platí $(M_m, M_n)=1$, kde $M_k = 2^k - 1$ je k-te Mersennove číslo. Ako z toho vyplýva nekonečnosť množiny všetkých prvočísel?
2. Riešte sústavu kongruencií

$$\begin{aligned} 2x &\equiv 5 \pmod 7 \\ 4x &\equiv 2 \pmod 6 \\ x &\equiv 3 \pmod 5 \end{aligned}$$

3. Dokážte, že $\frac{n}{\varphi(n)} = \sum_{d|n} \frac{\mu^2(d)}{\varphi(d)}$.
4. Zistite, či sú riešiteľné kongruencie a) $x^2 + 5x \equiv 12 \pmod{31}$, b) $x^2 \equiv 19 \pmod{30}$.
5. Dokážte, že ak $p = 4k+1$, tak $\sum\limits_{\substack{a=1 \\ (a|p)=1}}^{p-1} a = \frac{p(p-1)}{4}$.