



Relácie a funkcie

22. novembra 2012



Relácie

Definícia

Relácia R medzi množinami A a B je ľubovoľná podmnožina množiny $A \times B$. Pokiaľ $A = B$, hovoríme o relácii na množine A .

Obvykle namiesto $(a, b) \in R$ používame zápis aRb .

Definičný obor: $D(R) = \{a \in A; (\exists b \in B)aRb\}$

Obor hodnôt: $H(R) = \{b \in B; (\exists a \in A)aRb\}$

Príklady:

- $id_A = \{(a, a); a \in A\}$ na množine A
- $R = \{(x, y) \in I \times I; x^2 + y^2 = 1\}$ na množine $I = \langle -1, 1 \rangle$
- $\{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}; a \leq b\}$ na množine \mathbb{N}



Relácie

Definícia

Nech A je množina a R je relácia na množine A . Hovoríme, že relácia R je:

- (i) *reflexívna*, ak pre každé $a \in A$ platí aRa ,
- (ii) *ireflexívna (antireflexívna)*, ak pre žiadne $a \in A$ neplatí aRa ,
- (iii) *symetrická*, ak pre ľubovoľné $a, b \in A$ platí $aRb \Rightarrow bRa$,
- (iv) *antisymetrická*, ak pre ľubovoľné $a, b \in A$ platí $aRb \wedge bRa \Rightarrow a = b$,
- (v) *asymetrická*, ak pre ľubovoľné $a, b \in A$ platí $aRb \Rightarrow \neg(bRa)$,
- (vi) *tranzitívna*, ak $\forall a, b, c \in A$ platí $aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc$,
- (vii) *trichotomická*, ak pre ľubovoľné $a, b \in A$ platí práve jedna z možností aRb , bRa , $a = b$.



Relácia ekvivalencie

Definícia

Relácia R na množine A sa nazýva *relácia ekvivalencie* ak je reflexívna, symetrická a tranzitívna.

Viete: relácie ekvivalencie zodpovedajú rozkladom.



Čiastočné usporiadanie

Definícia

Relácia R na množine A sa nazýva *čiastočné usporiadanie* na množine A , ak relácia R je reflexívna, tranzitívna a antisymetrická. Hovoríme tiež, že dvojica (A, R) je *čiastočne usporiadaná množina*. Ak sú navyše ľubovoľné dva rôzne prvky množiny A *porovnateľné* reláciou R , t.j. platí

$$(\forall a, b \in A) a \neq b \Rightarrow aRb \vee bRa,$$

nazývame túto reláciu *lineárnym usporiadaním*.



Skladanie relácií

Definícia

Nech R je relácia medzi množinami A , B a S je relácia medzi množinami B , C . Potom reláciu

$$S \circ R = \{(a, c) \in A \times C; (\exists b \in B) aRb \wedge bSc\}$$

nazývame *zložením relácií S a R* .

Reláciu

$$R^{-1} = \{(b, a) \in B \times A; (a, b) \in R\}$$

medzi množinami B a A nazývame *inverznou reláciou* k relácii R .



Skladanie relácií

Tvrdenie

Ak R je ľubovoľná relácia medzi množinami A , B , tak platí

$$(R^{-1})^{-1} = R.$$

Definícia

Nech A je množina. Potom reláciu

$$id_A = \{(a, a); a \in A\}$$

na množine A nazývame *identita* na množine A .



Skladanie relácií

Tvrdenie

Nech A, B sú množiny R je relácia medzi množinami A, B a S je relácia medzi množinami B, A . Potom platí

$$R \circ id_A = R$$

$$id_A \circ S = S.$$

Tvrdenie

Nech R je relácia medzi množinami A a B , S je relácia medzi množinami B a C . Potom platí:

$$(S \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}.$$



Skladanie relácií

Tvrdenie

Nech R je relácia na množine A . Potom platí:

- (i) relácia R je reflexívna práve vtedy, keď $id_A \subseteq R$;
- (ii) relácia R je symetrická práve vtedy, keď $R^{-1} = R$;
- (iii) relácia R je antisymetrická práve vtedy, keď $R \cap R^{-1} \subseteq id_A$;
- (iv) relácia R je tranzitívna práve vtedy, keď $R \circ R \subseteq R$;
- (v) ľubovoľné dva rôzne prvky A sú porovnateľné v relácii R práve vtedy, keď $R \cup R^{-1} \supseteq A \times A \setminus id_A$.



Skladanie relácií

Tvrdenie

Ak R je čiastočné usporiadanie na množine A , tak aj R^{-1} je čiastočné usporiadanie na A .

Ak navyše R je lineárne, tak to isté platí aj o usporiadaní R^{-1} .



Funkcie

Definícia

Zobrazenie (*funkcia*) z množiny A do B je relácia medzi množinami A a B taká, že pre každé $a \in A$ existuje práve jedno $b \in B$ s vlastnosťou $(a, b) \in f$.

$$(\forall a \in A)(\exists! b \in B)(a, b) \in f$$

Zobrazenie f z A do B budeme označovať $f: A \rightarrow B$. Množinu A nazývame *definičný obor* a B *obor hodnôt* zobrazenia f .

Namiesto zápisu $(a, b) \in f$ budeme používať zápis $f(a) = b$.



Skladanie zobrazení

Definícia

Ak $f: A \rightarrow B$ je zobrazenie a $C \subseteq A$, tak zobrazenie $f|_C: C \rightarrow B$, definované predpisom

$$f|_C(x) = f(x)$$

pre všetky $x \in C$, nazývame *zúženie zobrazenia f na množinu C* .

$$f|_C = f \cap (C \times B)$$

Tvrdenie

Nech $f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow C$ sú zobrazenia. Potom aj $g \circ f$ je zobrazenie

$$g \circ f(a) = g(f(a)) \text{ pre každé } a \in A.$$



Injekcia, bijekcia a surjekcia

Definícia

Nech $f: X \rightarrow Y$ je zobrazenie.

- f je *injektívne*, ak $(\forall x, y \in X) x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$
- f je *surjektívne*, ak $(\forall y \in Y) (\exists x \in X) f(x) = y$.
- f je *bijektívne*, ak je súčasne injektívne aj surjektívne.

Zloženie dvoch injekcií (surjekcií, bijekcií) je opäť injekcia (surjekcia, bijekcia).

Poznámka

Ekvivalentná definícia injekcie: $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$.



Inverzné zobrazenie

Tvrdenie

Nech $f: A \rightarrow B$ je zobrazenie. Potom f^{-1} je zobrazenie z B do A práve vtedy, keď f je bijekcia.

Tvrdenie

Nech $f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow A$ sú zobrazenia. Nasledujúce podmienky sú ekvivalentné:

- (i) $g = f^{-1}$ (t.j. g je inverzné zobrazenie k f);
- (ii) platí $g \circ f = id_A$ a $f \circ g = id_B$.



Vzor a obraz množiny

Definícia

Nech $f: X \rightarrow Y$ je zobrazenie, $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$.

Potom množinu

$$f[A] := \{f(a); a \in A\}$$

nazývame *obraz množiny* A v zobrazení f a množinu

$$f^{-1}[B] = \{a; f(a) \in B\}$$

nazývame *vzor množiny* B v zobrazení f .



Vzor a obraz množiny

$$x \in f[A] \Leftrightarrow (\exists a \in A)x = f(a)$$

$$x \in f^{-1}[B] \Leftrightarrow f(x) \in B$$

V prípade, že $B = \{b\}$ je jednoprvková množina, niekedy namiesto zápisu $f^{-1}[\{b\}]$ použijeme zápis $f^{-1}(b)$. (Z kontextu by malo byť zrejmé, či hovoríme o inverznej funkcii k f , alebo zápis $f^{-1}(b)$ znamená vzor jednoprvkovej množiny.)



Vzor a obraz množiny

Tvrdenie

Nech $f: X \rightarrow Y$, $g: Y \rightarrow Z$ sú zobrazenia, $A, B \subseteq X$, $C, D \subseteq Y$, $E \subseteq Z$, $A_i \subseteq X$ a $B_i \subseteq Y$ pre každé $i \in I$. Potom platí

- (i) $g \circ f[A] = g[f[A]]$;
- (ii) $(g \circ f)^{-1}[A] = g^{-1}[f^{-1}[A]]$;
- (iii) $A \subseteq f^{-1}[f[A]]$ a ak f je injektívne, tak $A = f^{-1}[f[A]]$;
- (iv) $f[f^{-1}[C]] \subseteq C$ a ak f je surjektívne, tak $f[f^{-1}[C]] = C$;
- (v) $f[A \cap B] \subseteq f[A] \cap f[B]$ a ak f je injektívne, tak $f[A \cap B] = f[A] \cap f[B]$;
- (vi) $f[\bigcap_{i \in I} A_i] \subseteq \bigcap_{i \in I} f[A_i]$ a ak f je injektívne, tak $f[\bigcap_{i \in I} A_i] = \bigcap_{i \in I} f[A_i]$;



Vzor a obraz množiny

Tvrdenie

$$(vii) f[A \cup B] = f[A] \cup f[B];$$

$$(viii) f[\bigcup_{i \in I} A_i] = \bigcup_{i \in I} f[A_i];$$

$$(ix) f^{-1}[C \cap D] = f^{-1}[C] \cap f^{-1}[D];$$

$$(x) f^{-1}[\bigcap_{i \in I} B_i] = \bigcap_{i \in I} f^{-1}[B_i];$$

$$(xi) f^{-1}[C \cup D] = f^{-1}[C] \cup f^{-1}[D];$$

$$(xii) f^{-1}[\bigcup_{i \in I} A_i] = \bigcup_{i \in I} f^{-1}[A_i];$$

(xiii) $A \subseteq B \Rightarrow f[A] \subseteq f[B]$ a ak f je injekcia, tak platí aj opačná implikácia;

(xiv) $C \subseteq D \Rightarrow f^{-1}[C] \subseteq f^{-1}[D]$ a ak f je surjekcia, tak platí aj opačná implikácia;

$$(xv) f[A] \subseteq C \Leftrightarrow A \subseteq f^{-1}[C].$$



Surjekcia a pravé inverzné zobrazenie

Tvrdenie

Nech $f: A \rightarrow B$ je zobrazenie. Potom platí:

- (i) f je surjekcia práve vtedy, keď existuje zobrazenie $g: B \rightarrow A$ také, že $f \circ g = id_B$.
- (ii) Nech navyše $A \neq \emptyset$. Potom f je injekcia práve vtedy, keď existuje zobrazenie $g: B \rightarrow A$ také, že $g \circ f = id_A$.

Dôsledok

Ak $A \neq \emptyset$ a existuje injekcia $f: A \rightarrow B$, tak existuje surjekcia $f: B \rightarrow A$.



Karteziánsky súčin systému množín

Definícia

Ak A , B sú ľubovoľné množiny, tak zobrazenia $p_1: A \times B \rightarrow A$ a $p_2: A \times B \rightarrow B$, dané predpismi

$$p_1(a, b) = a$$

$$p_2(a, b) = b$$

pre $(a, b) \in A \times B$, budeme nazývať *projekcie* z karteziánskeho súčinu $A \times B$ na množiny A a B .



Karteziánsky súčin systému množín

Definícia

Nech I je množina a pre každé $i \in I$ je A_i množina. Potom *karteziánsky súčin* systému množín A_i , $i \in I$ definujeme ako

$$\prod_{i \in I} A_i = \{f : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i; f(i) \in A_i\}$$

Pre každé $i \in I$ definujeme zobrazenie $p_i : \prod_{i \in I} A_i \rightarrow A_i$

$$p_i(f) = f(i),$$

ktoré nazývame *i-ta projekcia*.



Karteziánsky súčin funkcií

Definícia

Nech $f: A \rightarrow C$, $g: B \rightarrow D$ sú zobrazenia. Potom ich *karteziánsky súčin* je zobrazenie $f \times g: A \times B \rightarrow C \times D$ určené predpisom

$$f \times g(a, b) = (f(a), g(b)).$$

Ak pre každé $i \in I$ je $f_i: A_i \rightarrow B_i$ zobrazenie, tak karteziánsky súčin týchto zobrazení je $g = \prod_{i \in I} f_i: \prod_{i \in I} A_i \rightarrow \prod_{i \in I} B_i$, kde $g(f)$ pre

$f \in \prod_{i \in I} A_i$ je určená ako

$$g(f)(i) = f_i(f(i)).$$



Karteziánsky súčin funkcií

Tvrdenie

Nech $f: A \rightarrow C$, $g: B \rightarrow D$ sú zobrazenia.

- (i) Ak f aj g sú injekcie, tak $f \times g$ je injekcia.
- (ii) Ak f aj g sú surjekcie, tak $f \times g$ je surjekcia.
- (iii) Ak f aj g sú bijekcie, tak $f \times g$ je bijekcia.

Tvrdenie

Nech $f_i: A_i \rightarrow B_i$ je zobrazenie pre každé $i \in I$.

- (i) Ak f_i je injekcia pre každé $i \in I$, tak $\prod_{i \in I} f_i$ je injekcia.
- (ii) Ak f_i je surjekcia pre každé $i \in I$, tak $\prod_{i \in I} f_i$ je surjekcia.
- (iii) Ak f_i je bijekcia pre každé $i \in I$, tak $\prod_{i \in I} f_i$ je bijekcia.



Čiastočné usporiadanie

reflexívna, antisymetrická a tranzitívna relácia na množine A
 (A, \leq) je čiastočne usporiadaná množina

$$(\forall a \in A) a \leq a \quad (\text{R})$$

$$(\forall a, b \in A) a \leq b \wedge b \leq a \Rightarrow a = b \quad (\text{A})$$

$$(\forall a, b, c \in A) a \leq b \wedge b \leq c \Rightarrow a \leq c \quad (\text{T})$$

$$a < b \quad \Leftrightarrow \quad (a \leq b) \wedge a \neq b$$



Čiastočné usporiadanie

Lineárne usporiadanie = ľubovoľné 2 prvky množiny A sú porovnateľné

$$(\forall a, b \in A) a \neq b \Rightarrow a \leq b \vee b \leq a.$$

Príklady:

- (\mathbb{R}, \leq) , (\mathbb{Q}, \leq) , (\mathbb{Z}, \leq) , (\mathbb{N}, \leq)
- Ak (A, \leq) je čiastočne usporiadaná množina a $B \subseteq A$, tak $(B, \leq \cap (B \times B))$ je tiež čiastočne usporiadaná množina.
- $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$
- $(\mathbb{N}, |)$

$$a \mid b \Leftrightarrow (\exists c \in \mathbb{N}) b = c \cdot a$$



Hasseho diagram

Definícia

Nech (A, \leq) je čiastočne usporiadaná množina. Prvok a nazývame *predchodcom* prvku b , ak $a \leq b$ a súčasne platí

$$a \leq c \leq b \quad \Rightarrow \quad c = a \vee c = b.$$

Prvok b sa nazýva *nasledovník* prvku a .

Diagram – čiarou spojíme prvok s jeho nasledovníkom.



Hasseho diagram

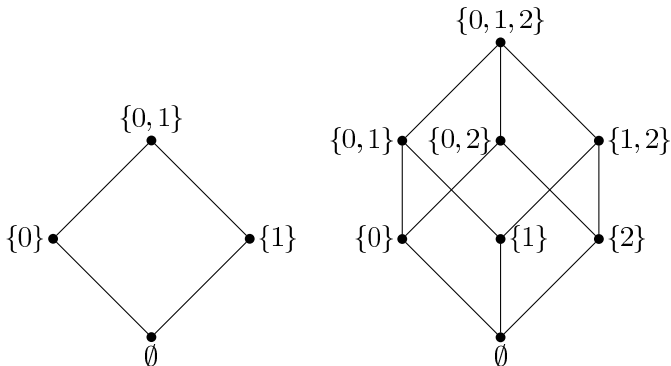


Figure: Hasseho diagram $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ pre 2- a 3-prvkovú množinu



Hasseho diagram

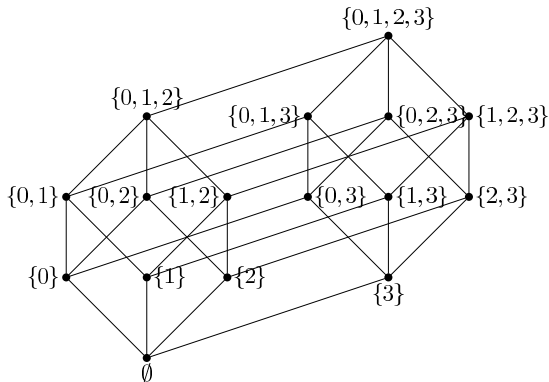


Figure: Hasseho diagram $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ pre 4-prvkovú množinu



Hasseho diagram

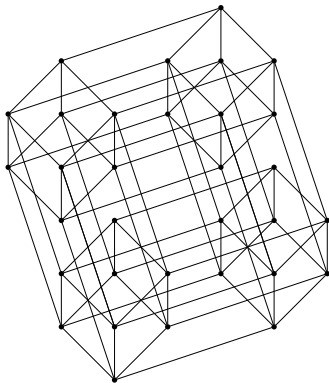


Figure: 5-rozmerná hyperkocka



Hasseho diagram

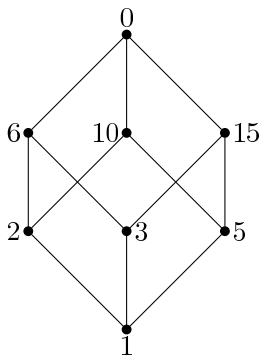


Figure: Hasseho diagram pre čiastočné usporiadanie | na množine $\{0, 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15\}$



Izomorfizmus

Definícia

Nech (X, \leq) a (Y, \preceq) sú čiastočne usporiadané množiny a $f: X \rightarrow Y$ je zobrazenie. Hovoríme, že zobrazenie f je *monotónne*, ak platí

$$(\forall x_1, x_2 \in X) x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \preceq f(x_2).$$

Niekedy používame aj zápis $f: (X, \leq) \rightarrow (Y, \preceq)$.

Ak je zobrazenie f navyše bijektívne a f^{-1} je tiež monotónne, tak f nazývame *izomorfizmus*. Ak existuje izomorfizmus medzi čiastočne usporiadanými množinami (X, \leq) a (Y, \preceq) , tak hovoríme, že (X, \leq) a (Y, \preceq) sú *izomorfné*, označujeme $(X, \leq) \cong (Y, \preceq)$.



Najmenší a minimálny prvok

Definícia

Nech (A, \leq) je čiastočne usporiadaná množina a $a \in A$. Hovoríme, že a je

- (i) *najmenší prvok* množiny A , ak $(\forall b \in A) a \leq b$;
- (ii) *najväčší prvok* množiny A , ak $(\forall b \in A) b \leq a$;
- (iii) *minimálny prvok* množiny A , ak $(\forall b \in A) b \leq a \Rightarrow b = a$;
- (iv) *maximálny prvok* množiny A , ak $(\forall b \in A) a \leq b \Rightarrow a = b$.

najmenší \Rightarrow minimálny

lineárne usporiadanie: najmenší \Leftrightarrow minimálny



Ostré čiastočné usporiadanie

Definícia

Reláciu $<$ na množine A nazývame *ostré čiastočné usporiadanie*, ak je antireflexívna, asymetrická a tranzitívna; t.j. pre $a, b, c \in A$ platí

$$a \not< a;$$

$$a < b \Rightarrow b \not< a;$$

$$a < b \wedge b < c \Rightarrow a < c.$$

Ak sú navyše ľubovoľné dva rôzne prvky porovnateľné, tak hovoríme o *ostrom lineárnom usporiadaní*.

$$a \neq b \Rightarrow a < b \vee b < a$$



Ostré čiastočné usporiadanie

Veta

Nech R je relácia na množine A .

R je čiastočné usporiadanie $\Rightarrow R \setminus id_A$ je ostré čiastočné usporiadanie

S je ostré čiastočné usporiadanie $\Rightarrow S \cup id_A$ je čiastočné usporiadanie

Priradenia $R \mapsto R \setminus id_A$ a $S \mapsto S \cup id_A$ sú navzájom inverzné (a teda). Tieto priradenia zachovávajú linearitu.



Dobre usporiadané množiny

Definícia

Nech (A, \leq) je čiastočne usporiadaná množina. Hovoríme, že (A, \leq) je *dobre usporiadaná množina*, resp. že \leq je *dobré usporiadanie* na množine A , ak každá neprázdna podmnožina množiny A má najmenší prvok v usporiadaní \leq .

Definícia

Ak (A, \leq) je lineárne usporiadaná množina, tak symbolom A_a budeme označovať množinu všetkých prvkov menších než a .

$$A_a = \{x \in A; x < a\}$$



Indukcia v dobre usporiadanej množine

Veta (Indukcia v dobre usporiadanej množine)

Nech (A, \leq) je dobre usporiadaná množina. Nech podmnožina $B \subseteq A$ má nasledujúcu vlastnosť:

$$(\forall a \in A) A_a \subseteq B \Rightarrow a \in B.$$

Potom $B = A$.

Príklady dobre usporiadaných množín: (\mathbb{N}, \leq) (a jej podmnožiny)



Lexikografické a antilexikografické usporiadanie

Definícia

Nech (A, \leq_A) , (B, \leq_B) sú čiastočne usporiadané množiny. Potom reláciu \leq na množine $A \times B$ definovanú ako

$$(a, b) \leq (a', b') \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} (a <_A a') \vee [(a = a') \wedge (b \leq_B b')]$$

nazývame *lexikografické usporiadanie*. Tiež hovoríme, že $(A \times B, \leq)$ je *lexikografický súčin* čiastočne usporiadaných množín (A, \leq_A) a (B, \leq_B) .

Antilexikografické usporiadanie na $A \times B$ definujeme ako

$$(a, b) \leq (a', b') \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} (b <_B b') \vee [(b = b') \wedge (a \leq_A a')].$$



Lexikografické a antilexikografické usporiadanie

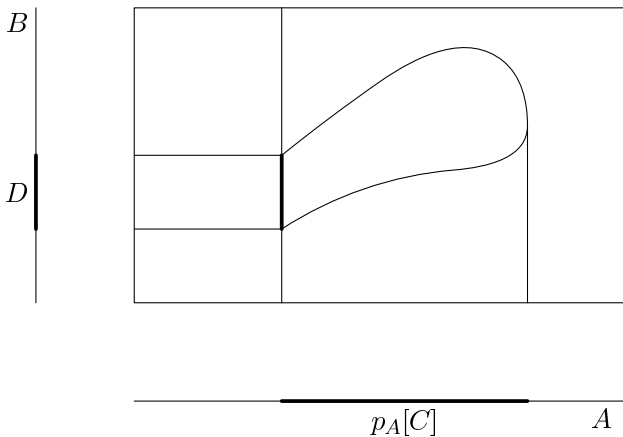
Tvrdenie

Nech (A, \leq) , (B, \leq) sú čiastočne usporiadané množiny a $(A \times B, \leq)$ je ich (anti)lexikografický súčin. Potom

- (i) $(A \times B, \leq)$ je čiastočne usporiadaná množina;
- (ii) ak (A, \leq) a (B, \leq) sú lineárne usporiadané, tak aj $(A \times B, \leq)$ je lineárne usporiadaná množina;
- (iii) ak (A, \leq) a (B, \leq) sú dobre usporiadané, tak aj $(A \times B, \leq)$ je dobre usporiadaná množina.



Lexikografické a antilexikografické usporiadanie





Súčet dobre usporiadaných množín

Príklad

Nech (B, \leq_B) a (C, \leq_C) sú čiastočne usporiadané množiny. Na $M := \{0\} \times B \cup \{1\} \times C$ zdefinujeme \leq ako:

$(0, b) \leq (1, c)$ pre ľubovoľné $b \in B$, $c \in C$;

pre $b, b' \in B$ platí $(0, b) \leq (0, b')$ práve vtedy, keď $b \leq_B b'$;

pre $c, c' \in C$ platí $(1, c) \leq (1, c')$ práve vtedy, keď $c \leq_C c'$.

Dostaneme čiastočné usporiadanie. Ak obe množiny sú lineárne (dobre) usporiadané, platí to aj o výslednej množine.

Označenie: $(B, \leq_B) + (C, \leq_C)$ alebo $B + C$

$$\{0\} + \mathbb{N} \cong \mathbb{N}$$

$$\mathbb{N} + \{0\} \not\cong \mathbb{N}$$

Neskôr: súčet a súčin ordinálnych čísel.



Súčet dobre usporiadaných množín

$$\begin{array}{ccc}
 \vdots & & \vdots \\
 (1,2) \bullet & & (1,2) \bullet \\
 (1,1) \bullet & & (1,1) \bullet \\
 (1,0) \bullet & (1,0) \bullet & \\
 & & \vdots \\
 & & (0,2) \bullet \\
 (0,2) \bullet & (0,2) \bullet & (1,1) \bullet \\
 (0,1) \bullet & (0,1) \bullet & (1,0) \bullet \\
 (0,0) \bullet & (0,0) \bullet & (0,0) \bullet \\
 \mathbb{N} + \mathbb{N} & \mathbb{N} + \{0\} & \{0\} + \mathbb{N}
 \end{array}$$

Figure: Príklady na súčet dobre usporiadaných množín



Počiatočný úsek

Definícia

Počiatočný úsek lineárne usporiadanej množiny (X, \leq) je podmnožina $U \subseteq X$ s vlastnosťou $x \in U \wedge y \leq x \Rightarrow y \in U$.

X a množiny tvaru $X_a = \{x \in X; x < a\}$ pre $a \in X$

Tvrdenie

Nech (X, \leq) je lineárne usporiadaná množina a nech $X' = \{X_a; a \in X\}$ je množina všetkých vlastných počiatočných úsekov množiny X . Potom zobrazenie $f: X \rightarrow X'$ určené predpisom

$$f(a) = X_a$$

je izomorfizmus (X, \leq) a (X', \subseteq) .