

Prirodzené čísla v ZFC

22. novembra 2012



Peanove axiomy

Definícia

Nech N je množina, 0 je nejaký prvok N a S je zobrazenie definované na N . Hovoríme, že trojica $(N, 0, S)$ spĺňa *Peanove axiomy*, ak platí:

(P1) $0 \in N$;

(P2) Ak $n \in N$, tak aj $S(n) \in N$.

(P3) Ak $n \in N$, tak $S(n) \neq 0$.

(P4) Ak $m, n \in N$ a $S(m) = S(n)$, tak $m = n$.

(P5) Ak $A \subseteq N$ je podmnožina množiny N taká, že $0 \in A$ a pre každé $n \in A$ aj $S(n) \in A$, tak $A = N$.

Induktívne množiny

Axióma X (Axióma nekonečnej množiny)

$$(\exists A)[\emptyset \in A \wedge (\forall x)(x \in A \Rightarrow x \cup \{x\} \in A)]$$

Definícia

Množinu, ktorá spĺňa podmienku

$$\emptyset \in A \wedge (\forall x)(x \in A \Rightarrow x \cup \{x\} \in A)$$

budeme nazývať *induktívna množina*.

Definícia množiny \mathbb{N}

Definícia

Množina *prirodzených čísel* \mathbb{N} je taká indukčná množina, že pre každú indukčnú množinu B platí $\mathbb{N} \subseteq B$.

Prvky tejto množiny nazývame *prirodzené čísla*.

Pre každé prirodzené číslo n budeme $S(n) = n \cup \{n\}$ nazývať *nasledovníkom* čísla n .

Definícia množiny \mathbb{N}

Lema

Prienik ľubovoľného neprázdneho systému induktívnych množín je induktívna množina.

Tvrdenie

Existuje práve jedna množina \mathbb{N} taká, že \mathbb{N} je induktívna a pre každú induktívnu množinu platí $\mathbb{N} \subseteq B$.

Definícia množiny \mathbb{N}

$$0 = \emptyset,$$

$$1 = 0 \cup \{0\} = \{0\},$$

$$2 = 1 \cup \{1\} = \{0, 1\},$$

$$3 = 2 \cup \{2\} = \{0, 1, 2\}, \dots$$

$$0, 1, 2, 3, \dots \in \mathbb{N}$$

Indukcia na \mathbb{N}

Veta (Indukcia na množine prirodzených čísel)

Nech $A \subseteq \mathbb{N}$ je množina taká, že

- (i) $0 \in A$;*
- (ii) $(\forall n \in \mathbb{N}) n \in A \Rightarrow S(n) \in A$;*

t.j. A obsahuje 0 a s každým prirodzeným číslom obsahuje aj jeho nasledovníka.

Potom platí $A = \mathbb{N}$.

\mathbb{N} splňa Peanove axiomy

Lema

Pre ľubovoľné prirodzené čísla m, n, k platí

- (i) $n \notin n$;
- (ii) $n = \emptyset \vee (\exists n_1 \in \mathbb{N}) n = S(n_1)$
- (iii) $n \subseteq \mathbb{N}$;
- (iv) $m \in n \Rightarrow S(m) \subseteq n$;
- (v) Ak $m \in n$ a $n \in k$, tak $m \in k$.
- (vi) $m \subseteq n \Rightarrow m = n \vee m \in n$;
- (vii) $n = \emptyset \vee \emptyset \in n$.

\mathbb{N} spĺňa Peanove axiomy

Dôsledok

Pre ľubovoľné $m, n \in \mathbb{N}$ platí:

- (i) $m \subsetneq n \Leftrightarrow m \in n$.
- (ii) $m \in n \Rightarrow S(m) \in S(n)$.

Tvrdenie

Pre ľubovoľné prirodzené čísla m, n platí

$$S(m) = S(n) \quad \Rightarrow \quad m = n.$$

Teda $(\mathbb{N}, \emptyset, S)$ spĺňa Peanove axiomy.

Definícia usporiadania

Definícia

Na množine \mathbb{N} definujeme reláciu $<$ tak, že pre $m, n \in \mathbb{N}$

$$m < n \Leftrightarrow m \in n.$$

Reláciu \leq zavedieme tak, že

$$m \leq n \Leftrightarrow m = n \vee m < n.$$

Definícia usporiadania

$$m \leq n \Leftrightarrow m \subseteq n \tag{1}$$

$$m < n \Leftrightarrow m \in n \Leftrightarrow m \subsetneq n. \tag{2}$$

Už máme dokázané, že (\mathbb{N}, \leq) je čiastočne usporiadaná množina.

Linearita a dobrota

Tvrdenie

Pre ľubovoľné $m, n \in \mathbb{N}$ platí

$$m \in n \vee m = n \vee n \in m.$$

Tvrdenie

Množina (\mathbb{N}, \leq) je dobre usporiadaná množina.