20.9.

1. Tautológie:
   $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
   $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$ (Pokec o tom, že sa to volá obmenená implikácia a často sa to používa – injekcia ako príklad.)
   $(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow \neg q) \Rightarrow \neg p$ (Pokec o tom, ako to súvisí s dôkazom sporom.)
2. Množinové identity: (Pomocou výrokov/tabuľky aj cez Vennove diagramy.)
   $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
   $[(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq C)] \Rightarrow (A \subseteq C)$
   $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$
   $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
   $A \triangle (B \triangle C) = (A \triangle B) \triangle C$ (kde $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ označuje symetrický rozdiel množín)

Pri riešení úlohy 2 vznikla otázka, či je jedno, ktorý z nasledujúcich výrokov dokazujeme (alebo ktorý z nich by mal byť ten správny na vyriešenie danej úlohy). Do istej miery to súvisí aj s témou budúceho cvičenia.

$$(\forall x)([(x \in A \Rightarrow x \in B) \wedge (x \in B \Rightarrow x \in C)] \Rightarrow [(x \in A) \Rightarrow (x \in C)])$$
$$[(\forall x)(x \in A \Rightarrow x \in B) \wedge (\forall x)(x \in B \Rightarrow x \in C)] \Rightarrow [(\forall x)(x \in A) \Rightarrow (x \in C)]$$

27.9.

1. Zapísať pomocou kvanfikátorov:
   Postupnosť (x_n) konverguje k 0.
   Postupnosť (x_n) má limitu.
   Negácie predchádzajúcich dvoch výrokov.
2. Zapísať pomocou kvantifkátorov: Existuje práve jedno x také, že platí $P(x)$.
3. Zistiť, či platí ekvivalencia alebo aspoň niektorá z implikácií a zdôvodniť:
   $(\exists x)(P(x) \wedge Q(x)) \Leftrightarrow [(\exists x)P(x) \wedge (\exists x)Q(x)]$
   $(\exists x)(P(x) \vee Q(x)) \Leftrightarrow [(\exists x)P(x) \vee (\exists x)Q(x)]$
   $(\forall x)(P(x) \wedge Q(x)) \Leftrightarrow [(\forall x)P(x) \wedge (\forall x)Q(x)]$
   $(\forall x)(P(x) \vee Q(x)) \Leftrightarrow [(\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x)]$
   $(\forall x)(P(x) \Rightarrow Q(x)) \Leftrightarrow [(\exists x P(x)) \Rightarrow (\exists x Q(x))]$
4. Pre výrokovú funkciu $P(x,y)$ uvažujme výroky $P_1(x,y) = (\forall x)(\forall y)P(x,y)$, $P_2 = (\forall x)(\exists y)P(x,y)$, $P_3 = (\exists x)(\forall y)P(x,y)$, $P_4 = (\exists x)(\exists y)P(x,y)$, $P_5 = (\forall y)(\forall x)P(x,y)$, $P_6 = (\forall y)(\exists x)P(x,y)$, $P_7 = (\exists y)(\forall x)P(x,y)$, $P_8 = (\exists y)(\exists x)P(x,y)$.
   a) Ukážte, že pre tieto výroky platí: $P_1 \Leftrightarrow P_5$, $P_4 \Leftrightarrow P_8$ a

$$\begin{tikzcd}
 & P_3 \arrow[r, Rightarrow] & P_6 \arrow[dr, Rightarrow] & \\
P_1 \arrow[ur, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & & & P_4 \\
 & P_7 \arrow[r, Rightarrow] & P_2 \arrow[ur, Rightarrow] &
\end{tikzcd}$$

   b) Ukážte na príklade, že implikácie v predchádzajúcom diagrame nemožno nahradiť ekvivalenciami.
   c) Ukážte na príklade, že nemusia platiť implikácie $P_3 \Rightarrow P_2$ a $P_7 \Rightarrow P_6$.
   Toto cvičenie sa dá stručne zhrnúť tak, že všetky vzťahy medzi výrokmi $P_2, \ldots, P_7$ sú tie, ktoré sú naznačené v uvedenom diagrame.

4.10

Usporiadaná dvojica: $(a,b) = (c,d) \Leftrightarrow a = c \wedge b = d$
Karteziánsky súčin: $A \times B = \{(a,b); a \in A, b \in B\}$

1. Ukážte, že pre ľubovoľné množiny A, B, C, D platí:
   (a) $A \times \emptyset = \emptyset \times A = \emptyset$;
   (b) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$;
   (c) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$;
   (d) $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$.
   (e) Ak navyše predpokladáme, že A, B, C, D sú neprázdne, tak $A \times B = C \times D$ platí práve vtedy, keď $A = C$ a $B = D$.
2. Ukážte na konkrétnych príkladoch, že vo všeobecnosti neplatí $A \times B = B \times A$, $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$.
3. Dokážte, že pre $A \neq \emptyset$ platí $A \times B \subseteq A \times C \Leftrightarrow B \subseteq C$. Platí toto tvrdenie bez predpokladu $A \neq \emptyset$?
4. Ukážte, že ak $A \times C \subseteq B \times D$ a $A \times C \neq \emptyset$, tak $A \subseteq B$ a $C \subseteq D$. Ukážte na príklade, že bez predpokladu $A \times C \neq \emptyset$ už toto tvrdenie neplatí.

11.10 a 18.10

1. Pre reláciu na množine A platí:
   R je reflexívna $\Leftrightarrow id_A \subseteq R$
   R je tranzitívna $\Leftrightarrow R \circ R \subseteq R$
   R je symetrická $\Leftrightarrow R = R^{-1}$
   R je antisymetrická práve vtedy, keď $R \cap R^{-1} = id_A$
   ľubovoľné dva rôzne prvky A sú porovnateľné v relácii $R \Leftrightarrow R \cup R^{-1} \supseteq A \times A \setminus id_A$
2. Nech R je relácia medzi množinami A a B a nech $D(R) = A$. Zistite, či platia nasledujúce tvrdenia. Svoje tvrdenie vždy zdôvodnite (dokážte alebo nájdite kontrapríklad):
   a) $R^{-1} \circ R = id_A$;
   b) $R^{-1} \circ R \subseteq id_A$;
   c) $R^{-1} \circ R \supseteq id_A$.
3. Graficky znázornite dané relácie R, S na množine A; pokúste sa popísať a znázorniť aj relácie R^{-1}, S^{-1}, $S \circ R$, $R \circ S$, $R \circ R$, $S \circ S$. Ktoré z nich sú reflexívne, symetrické, antisymetrické, tranzitívne?
   a) $A = \langle -1, 1 \rangle$, $R = \{(x,y) \in A \times A; x^2 + y^2 = 1\}$, $S = \{(x,y) \in A \times A; x^2 + y^2 \leq 1\}$;
   b) $A = \mathbb{R}$; $R = \{(x,y) \in A \times A; |x| \geq |y|\}$, $S = \{(x,y) \in A \times A; |y| \geq |x|\}$;
   c) $A = \mathbb{R}$; $R = \{(x,y) \in A \times A; |x - y| < a\}$, $S = \{(x,y) \in A \times A; |x - y| < b\}$, kde a, b sú nejaké (pevne zvolené) reálne čísla.
4. Nech $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$ sú zobrazenia, $A, B \subseteq X$, $C, D \subseteq Y$, $E \subseteq Z$, $A_i \subseteq X$ a $B_i \subseteq Y$ pre každé $i \in I$. Potom platí
   (a) $f[A \cap B] \subseteq f[A] \cap f[B]$ a ak f je injektívne, tak $f[A \cap B] = f[A] \cap f[B]$;
   (b) $f[\bigcup_{i \in I} A_i] = \bigcup_{i \in I} f[A_i]$;
   (c) $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$;
   (d) $f[A] \subseteq C \Leftrightarrow A \subseteq f^{-1}(C)$.
5. Ak $f\colon X \to Y$ a $g\colon Y \to X$ sú zobrazenia také, že $g \circ f = id_X$, tak g je surjekcia a f je injekcia. Ukážte na príklade, že g nemusí byť injekcia a f nemusí byť surjekcia.
6. Nech $f\colon A \to C$, $g\colon B \to D$ sú zobrazenia.
   (a) Ak f aj g sú injekcie, tak $f \times g$ je injekcia.
   (b) Ak f aj g sú surjekcie, tak $f \times g$ je surjekcia.
   (c) Ak f aj g sú bijekcie, tak $f \times g$ je bijekcia.
   (Definíciu zobrazenia $f \times g$ nájdete v texte k prednáške.)

25.10

Všetky označenia, ktoré sa vyskytujú úlohách, nájdete v texte k prednáške (v kapitole o dobre usporiadaných množinách a v cvičeniach za ňou).

1. Každá podmnožina dobre usporiadanej množiny (so zdedeným usporiadaním) je dobre usporiadaná.
2. Nech $(A, \leq)$ je dobre usporiadaná množina a $f\colon A \to A$ je injektívne monotónne zobrazenie. Potom pre každé $a \in A$ platí $a \leq f(a)$. (Všimnite si, že podmienku, že f je injektívne a monotónne môžeme prepísať ako $a < b \Rightarrow f(a) < f(b)$.)
3. Ak $(A, \leq)$ je dobre usporiadaná $f\colon A \to A$ je izomorfizmus, tak $f = id_A$. (Inak povedané: Jediný izomorfizmus z A do A je id_A.)
4. Ak $(A, \leq)$ a $(B, \leq)$ sú dobre usporiadané množiny. Potom existuje najviac jeden izomorfizmus medzi nimi.
5. Nech $(X, \leq)$ je lineárne usporiadaná množina a nech $X' = \{X_a; a \in X\}$, kde $X_a = \{x \in X; x < a\}$. Potom zobrazenie $f\colon X \to X'$ určené predpisom
$$f(a) = X_a$$
je izomorfizmus medzi čiastočne usporiadanými množinami $(X, \leq)$ a $(X', \subseteq)$.
6. Zistite, ktoré z uvedených dobre usporiadaných množín sú izomorfné. Môžete sa pokúsiť ich aj nejako graficky znázorniť.
a) $(\mathbb{N}, \leq)$
b) $(\mathbb{N}, \leq) + (\mathbb{N}, \leq)$
c) $(\mathbb{N}, \leq) + (\{0\}, \leq)$
d) $(\{0\}, \leq) + (\mathbb{N}, \leq)$
e) $(\{0, 1\}, \leq) \times (\mathbb{N}, \leq)$ (lexikografický súčin)
f) $(\mathbb{N}, \leq) \times (\{0, 1\}, \leq)$ (lexikografický súčin)
g) $(\mathbb{N}, \leq) \times (\mathbb{N}, \leq)$ (lexikografický súčin)
h) $\sum_{n \in \mathbb{N}} (\{1, 2, \dots, n\}, \leq)$
i) $\sum_{n \in \mathbb{N}} (\mathbb{N}, \leq)$

8.11 a 15.11.

1. Ukážte, že sčitovanie, násobenie a umocňovanie kardinálov sú dobre definované.
2. Ukážte, že $|\mathbb{Z}| = \aleph_0$. (T.j. nájdite bijekciu medzi $\mathbb{Z}$ a $\mathbb{N}$.)
3. Rozhodnite o platnosti nasledujúceho tvrdenia. (Svoju odpoveď zdôvodnite, t.j. dokážte toto tvrdenie alebo nájdite kontrapríklad.)
Pre ľubovoľné množiny A, B platí $|A| < |B|$ práve vtedy, keď existuje bijekcia medzi množinou A nejakou vlastnou podmnožinou množiny B.
4. Ukážte priamo z definície (t.j. konštrukciou bijekcie resp. injekcie), že:
a) Ak $|A| = |B|$, tak $|\mathcal{P}(A)| = |\mathcal{P}(B)|$.
b) Ak $|A| \leq |B|$, tak $|\mathcal{P}(A)| \leq |\mathcal{P}(B)|$.
5. Ukážte, že ak pre množiny A, B platí $|A \setminus B| = |B \setminus A|$, tak $|A| = |B|$.
6. Dokážte, že pre ľubovoľné kardinálne čísla a, b, c platí:
a) $ab = ba$
b) $a(bc) = (ab)c$
c) $a \leq b \wedge c \neq 0 \Rightarrow c^a \leq c^b$
d) $a^{b+c} = a^b.a^c$
7. Ukážte, že $\aleph_0^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$.
8. Ukážte, že pre ľubovoľný konečný kardinál n platí $\mathfrak{c} = n.\mathfrak{c} = \mathfrak{c}.\mathfrak{c} = \mathfrak{c}^n = \mathfrak{c}^{\aleph_0}$.
9. Ukážte, že $(2^{\mathfrak{c}})^{2^{\mathfrak{c}}} = 2^{2^{\mathfrak{c}}}$. (Pokiaľ nie je jasné uzátvorkovanie, myslí sa tým $(2^{\mathfrak{c}})^{(2^{\mathfrak{c}})} = 2^{(2^{\mathfrak{c}})}$.)

Prehľad o operáciách s kardinálnymi číslami

$$a \le b \wedge b \le a \Rightarrow a = b$$
$$|\mathcal{P}(X)| = 2^{|X|}$$
$$a + b = b + a$$
$$a + (b + c) = (a + b) + c$$
$$b \le c \Rightarrow a + b \le a + c$$
$$ab = ba$$
$$a(bc) = (ab)c$$
$$a(b + c) = ab + ac$$
$$b \le c \Rightarrow ab \le ac$$
$$a^2 = a.a$$
$$a \le b \Rightarrow a^c \le b^c$$
$$a \le b \wedge c \ne 0 \Rightarrow c^a \le c^b$$
$$a^{b+c} = a^b.a^c$$
$$(a^b)^c = a^{bc}$$
$$a^b \le 2^{ab}$$
$$a < 2^a$$
$$\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$$
$$a \ge \aleph_0 \Rightarrow \aleph_0 + a = a$$
$$\aleph_0.\aleph_0 = \aleph_0$$
$$\aleph_0^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$$

22.11.

1. Rozhodnite o platnosti nasledujúceho tvrdenia. (Svoju odpoveď zdôvodnite, t.j. dokážte toto tvrdenie alebo nájdite kontrapríklad.)
   Pre ľubovoľné množiny A, B platí $|A| < |B|$ práve vtedy, keď existuje bijekcia medzi množinou A nejakou vlastnou podmnožinou množiny B.
2. Ukážte, že ak pre množiny A, B platí $|A \setminus B| = |B \setminus A|$, tak $|A| = |B|$.
3. Ukážte, že ak A je spočítateľná množina, B je nespočítateľná množina a $A \subseteq B$, tak $|B \setminus A| = |B|$. (Množina X je spočítateľná, ak $|X| \le \aleph_0$ a nespočítateľná ak $|X| > \aleph_0$. V tejto úlohe se môže hodiť použitie faktu, že pre každú množinu platí buď $|X| \le \aleph_0$ alebo $|X| \ge \aleph_0$, ktorý sme zatiaľ nedokázali.)
4. Ukážte, že množina všetkých zobrazení z $\mathbb{Q}$ do $\mathbb{Q}$ nie je spočítateľná. (Môžete vyskúšať použiť diagonálnu metódu aj priamy výpočet kardinality tejto množiny.)
5. Ukážte, že množina všetkých konečných podmnožín $\mathbb{N}$ je spočítateľná.
6. Aká je kardinalita množiny všetkých injekcií z $\mathbb{N}$ do $\mathbb{N}$?
7. Ukážte, že ak pre množiny A, B platí $|A \setminus B| = |B \setminus A|$, tak $|A| = |B|$. Platí obrátená implikácia?
8. Nech $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je funkcia taká, že pre každé $x \in \mathbb{R}$ platí $f(f(x)) = x$. Dokážte, že existuje iracionálne číslo, ktoré sa funkciou f zobrazí na iracionálne číslo.
9. S využitím faktu, že pre nekonečné kardinály platí $b.b = b$ (ktorý dokážeme neskôr) ukážte, že ak $2 < a \le b$, kde a, b sú nekonečné kardinály, tak $2^b = a^b$.
10. Nech $S = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$. Ukážte, že existujú množiny V, H také, že $S = V \cup H$, prienik V sa každou vertikálnou priamkou v rovine $\mathbb{R}^2$ je konečný a prienik H sa každou horizontálnou priamkou je konečný. (T.j. pre každé $x \in \mathbb{Q}$ sú množiny $\{y \in \mathbb{Q}; (x, y) \in V\} = \{x\} \times \mathbb{Q} \cap V$ aj $\{y \in \mathbb{Q}; (y, x) \in H\} = \mathbb{Q} \times \{x\} \cap H$ konečné.) Hint: Vedeli by ste podobné tvrdenie dokázať pre $\mathbb{N}$ namiesto $\mathbb{Q}$?