Druhá prémiová úloha: (6 bodov) Aká je kardinalita množiny všetkých bijekcií z $\mathbb{N}$ do $\mathbb{N}$? (Bijekcie z $\mathbb{N}$ do $\mathbb{N}$ sa niekedy zvyknú nazývať aj permutáciami množiny $\mathbb{N}$. Na základe analógie s prirodzenými číslami by sme kardinalitu takejto množiny mohli nazvať $\aleph_0$-faktoriál.)

Riešenie: Označme množinu všetkých bijekcií z $\mathbb{N}$ do $\mathbb{N}$ ako $\mathrm{Bij}(\mathbb{N},\mathbb{N})$.

Ľahko získame horný odhad na kardinalitu tejto množiny, keďže každá bijekcia je súčasne zobrazením z $\mathbb{N}$ do $\mathbb{N}$.

$$|\mathrm{Bij}(\mathbb{N},\mathbb{N})| \leq \aleph_0^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}.$$

(Rovnosť $\aleph_0^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$ poznáme z prednášky/cvičení, ale môžeme si pripomenúť, že sa ľahko odvodí pomocou Cantor-Bernsteinovej vety a nerovností $\aleph_0^{\aleph_0} \geq 2^{\aleph_0}$ a $\aleph_0^{\aleph_0} \leq (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 \cdot \aleph_0} = 2^{\aleph_0}$.)

Ak sa nám podarí odvodiť aj opačnú nerovnosť, tak budeme mať $|\mathrm{Bij}(\mathbb{N},\mathbb{N})| = \mathfrak{c}$. Na to by nám stačilo nájsť injekciu do $\mathrm{Bij}(\mathbb{N},\mathbb{N})$ z nejakej množiny s kardinalitou $\mathfrak{c}$, napríklad z $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Pre ľubovoľnú funkciu $f \in \mathrm{Bij}(\mathbb{N},\mathbb{N})$ definujme

$$\mathrm{Fix}(f) = \{n \in \mathbb{N}; f(n) = n\}.$$

(Teda $\mathrm{Fix}(f)$ je množina tých bodov, ktoré zobrazenie f nemení – tzv. pevné body zobrazenia f, po anglicky fixed point alebo fixpoint.) Položme si otázku, či pre každú množinu $A \subseteq \mathbb{N}$ vieme nájsť bijekciu $f_A\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takú, že $\mathrm{Fix}(f_A) = A$. Rozlíšime dva prípady.

Ak doplnok množiny A je nekonečný, t.j. $\mathbb{N} \setminus A = \{b_n; n \in \mathbb{N}\}$ (pričom môžeme predpokladať, že prvky množiny $\mathbb{N} \setminus A$ máme zapísané v rastúcom poradí, t.j. $b_1 < b_2 < \cdots < b_n < b_{n+1} < \dots$), tak môžeme definovať funkciou f_A takto:

$$f_A(x) = \begin{cases} x & \text{ak } x \in A, \\ b_{2k+1} & \text{ak } x = b_{2k} \text{ pre nejaké } k \in \mathbb{N}, \\ b_{2k} & \text{ak } x = b_{2k+1} \text{ pre nejaké } k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Inak povedané, prvky množiny A sme ponechali namieste a prvky z doplnku sme rozdelili do dvojíc a tie navzájom vymenili. Takéto zobrazenie je bijekcia z $\mathbb{N}$ do $\mathbb{N}$ a platí $\mathrm{Fix}(f_A) = A$.

Teraz sa zaoberajme prípadom, že množina $\mathbb{N} \setminus A$ je konečná.

Ak $\mathbb{N} \setminus A = \emptyset$, tak $f = id_{\mathbb{N}}$ je funkcia s vlastnosťou $\mathrm{Fix}(f_A) = \mathbb{N} = A$.

Ak je množina $\mathbb{N} \setminus A$ jednoprvková, tak bijekciu takú, že $\mathrm{Fix}(f) = A = \mathbb{N} \setminus \{a\}$ očividne nájsť nemôžeme. Na prvok a sa totiž nemôže zobraziť žiadny prvok z $\mathbb{N} \setminus A$ (keďže tie sa zobrazením f nemenia) a ani prvok a (keďže ten sa na seba zobraziť nesmie). Takéto zobrazenie neexistuje.

Ak je však množina $\mathbb{N} \setminus A$ aspoň dvojprvková konečná množina, tak takéto zobrazenie budeme vedieť zostrojiť. Opäť označme b_k jej prvky zoradené vzostupne, t.j. $\mathbb{N} \setminus A = \{b_0, \dots, b_n\}$, pričom $b_0 < b_1 < \cdots < b_n$. Položme $f_A(x) = x$ pre $x \in A$, $f_A(b_k) = b_{k+1}$ pre $0 \leq k < n$ a $f_A(b_n) = b_0$. (Teda prvky množiny $\mathbb{N} \setminus A$ cyklicky spermutujeme.)

Týmto je definovaná bijekcia $f_A\colon \mathbb{N}\to\mathbb{N}$ taká, že $\mathrm{Fix}(f_A)=A$.

Priradenie $A\mapsto f_A$, ktoré sme práve popísali, je zobrazením z množiny $\mathcal{P}(\mathbb{N})\setminus \{\mathbb{N}\setminus\{a\}\in\mathbb{N}\}$ všetkých podmnožín $\mathbb{N}$, ktoré nemajú jednoprvkový doplnok, do množiny $\mathrm{Bij}(\mathbb{N},\mathbb{N})$. Toto zobrazenie je súčasne injektívne; ak totiž platí $f_A=f_B$, tak musí platiť $A=\mathrm{Fix}(f_A)=\mathrm{Fix}(f_B)=B$.

Keďže z množiny $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, ktorá má kardinalitu $\mathfrak{c}$, sme vynechali spočítateľnú množinu $\{\mathbb{N}\setminus\{a\}\in\mathbb{N}\}$, aj rozdiel $\mathcal{P}(\mathbb{N})\setminus\{\mathbb{N}\setminus\{a\}\in\mathbb{N}\}$ je množina kardinality $\mathfrak{c}$. (Pozri cvičenia.)[1]

Našli sme teda injekciu z množiny s kardinalitou $\mathfrak{c}$ do množiny $\mathrm{Bij}(\mathbb{N},\mathbb{N})$. Dostávame teda aj opačnú nerovnosť

$$\mathfrak{c}\le|\mathrm{Bij}(\mathbb{N},\mathbb{N})|$$

a na základe Cantor-Bernsteinovej vety máme potom aj rovnosť $|\mathrm{Bij}(\mathbb{N},\mathbb{N})|=\mathfrak{c}$. $\square$

Iná možnosť pre dolný odhad: Zaujíma už len nájsť množinu bijekcií z $\mathbb{N}$ do $\mathbb{N}$, ktoré majú kardinalitu $\mathfrak{c}$.

Rozdeľme si prirodzené čísla $\mathbb{N}=\{0,1,2,3,\dots\}$ na dvojprvkové množiny $\{0,1\},\{2,3\},\dots,\{2k,2k+1\},\dots$ Skúsme rátať koľko je takých bijekcií, pri ktorých sa prvok z takejto dvojice zobrazí iba na seba, alebo na druhý prvok tejto dvojice. Dvojíc máme $\aleph_0$, pre každú máme dve možnosti (prvky sa zobrazia na seba, alebo sa vymenia). Celkovo máme teda $2^{\aleph_0}$ možností. (Túto vec by bolo treba vysvetliť detailnejšie, ale podrobné zdôvodnenie už nechávam na vás.) $\square$

Iné riešenie: Už budeme dokazovať len nerovnosť $\mathfrak{c}\le|\mathrm{Bij}(\mathbb{N},\mathbb{N})|$.

Využijeme Riemannovu vetu prerovnaní, ktorú by ste mohli poznať z matematickej analýzy. Podľa tejto vety pre ľubovoľný rad $\sum x_n$, ktorý konverguje, ale nekonverguje absolútne (t.j. nekonverguje rad $\sum|x_n|$) a pre každé dané reálne číslo c sa dá nájsť prerovnanie radu, ktoré konverguje k číslu c. Teraz si stačí uvedomiť, že prerovnanie radu je jednoznačne určené prečíslovaním indexov, t.j. nejakou bijekciou z $\mathbb{N}$ do $\mathbb{N}$.

Ak si teda pevne zvolíme nejaký rad, ktorý nie je absolútne konvergentný (napríklad $\sum_{n=0}^{\infty}x_n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n+1}$), tak pre každé reálne číslo existuje bijekcia $f\colon\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ taká, že prerovnaný rad $\sum_{n=0}^{\infty}x_{f(n)}$ konverguje k číslu c. Teda všetkých možných prerovnaní (všetkých možných bijekcií) je aspoň toľko ako reálnych čísel. $\square$

[1] Vlastne by nám úplne stačilo uviesť prvú časť, kde sme našli f_A pre množiny $A\subseteq\mathbb{N}$ s nekonečným doplnkom. Vieme totiž, že konečných podmnožín $\mathbb{N}$ je $\aleph_0$.