

## D.Ú.–sada 10

1. Dokážte, že pre prirodzené čísla  $m, n$  také, že  $(m, n) = 1$  platí  $(M_m, M_n) = 1$ , kde  $M_k = 2^k - 1$  je  $k$ -te Mersennove číslo. Ako z toho vyplýva nekonečnosť množiny všetkých prvočísel?
2. Riešte sústavu kongruencií

$$3x \equiv 7 \pmod{5}$$

$$x \equiv 1 \pmod{4}$$

$$5x \equiv 2 \pmod{11}$$

3. Dokážte, že  $\sum_{t|n} d(t)^3 = (\sum_{t|n} d(t))^2$ .
4. Zistite, či sú riešiteľné kongruencie a)  $x^2 \equiv 17 \pmod{29}$ , b)  $3x^2 \equiv 12 \pmod{23}$ , c)  $2x^2 \equiv 27 \pmod{41}$ .
5. Dokážte, že ak  $p = 4k + 1$ , tak  $\sum_{a=1}^{p-1} a \left(\frac{a}{p}\right) = 0$ .