

D.Ú.-sada 13

1. Dokážte, že súčin n po sebe idúcich prirodzených čísel je deliteľný číslom $n!$.
2. Dokážte, že prirodzené číslo $n > 1$, ktorého desiatkový zápis pozostáva zo samých jednotiek, nemôže byť štvorcom prirodzeného čísla.
3. Dokážte, že $\frac{n}{\varphi(n)} = \sum_{d|n} \frac{\mu^2(d)}{\varphi(d)}$.
4. Zistite, či sú riešiteľné kongruencie a) $x^2 \equiv 3 \pmod{31}$, b) $x^2 \equiv 5 \pmod{31}$, c) $x^2 \equiv 631 \pmod{1093}$.
5. Dokážte, že 5 je kvadratický zvyšok pre prvočísla tvaru $10k \pm 1$ a kvadratický nezvyšok pre prvočísla tvaru $10k \pm 3$.