

D.Ú.–sada 9

1. Dokážte, že ak p aj $p^2 + 2$ sú prvočísla, tak aj $p^3 + 2$ je prvočíslo. Koľko takých trojíc existuje?
2. Riešte sústavu kongruencií

$$2x \equiv 5 \pmod{7}$$

$$4x \equiv 2 \pmod{6}$$

$$x \equiv 3 \pmod{5}$$

3. Dokážte, že $\frac{n}{\varphi(n)} = \sum_{d|n} \frac{\mu^2(d)}{\varphi(d)}$.
4. Zistite, či sú riešiteľné kongruencie a) $x^2 + 5x \equiv 12 \pmod{31}$, b) $x^2 \equiv 19 \pmod{30}$.
5. Dokážte, že ak $p = 4k + 1$, tak $\sum_{\substack{a=1 \\ (a|p)=1}}^{p-1} a = \frac{p(p-1)}{4}$.