Axiomatický prístup k teórii množín

30. septembra 2013

Georg Cantor

Georg Cantor - zakladateľ teórie množín
1874 - dôkaz o existencii transcendentných čísel
Nepoužíval axiomatický prístup – tzv. naivná teória množín.
Množina = súhrn objektov určených nejakou vlastnosťou.

Russellov paradox

Spomedzi všetkých množín vyberieme tie množiny, ktoré nie sú prvkom samej seba.

$$A = \{x; x \notin x\}$$

Ak $A \in A$, tak $A \notin A$ – spor.
Ak $A \notin A$, tak $A \in A$ – spor.

Berryho paradox

$B = \{n; n$ je prirodzené číslo, ktoré sa dá definovať najviac 20 slovami slovenského jazyka$\}$
Zoberieme najmenšie n, ktoré nepatrí do B:
$n =$ je najmenšie prirodzené číslo, ktoré sa nedá popísať najviac 20 slovami slovenského jazyka
Máme $n \in B$ aj $n \notin B$.

Hilbertov program

Ciele: Pomocou axiomatického prístupu

- odstrániť známe paradoxy;
- dokázať bezospornosť teórie množín;
- v rámci tejto teórie sformalizovať celú matematiku.

Jazyk teórie množín

- Ak x, y sú množinové premenné, tak $(x = y)$ a $(x \in y)$ sú formuly teórie množín. (Tieto dva typy formúl nazývame *atomické formuly*.)
- Ak φ, ψ sú formuly teórie množín, tak aj zápisy $\neg\varphi$, $\varphi \wedge \psi$, $\varphi \vee \psi$, $\varphi \Rightarrow \psi$ a $\varphi \Leftrightarrow \psi$ sú formuly teórie množín.
- Ak x je množinová premenná a φ je formula teórie množín, tak $((\exists x)\varphi)$ a $((\forall x)\varphi)$ sú tiež formuly teórie množín.

Za *formuly teórie množín* považujeme len atomické formuly a formuly, ktoré z nich vieme získať použitím konečného počtu uvedených pravidiel.

Axiómy systému ZFC

Axióma I (Axióma extenzionality)

$$(\forall x)(\forall y)[(x = y) \Leftrightarrow (\forall z)(z \in x \Leftrightarrow z \in y)]$$

Dve množiny sa rovnajú práve vtedy, keď obsahujú rovnaké prvky.

Axióma IV (Axióma existencie)

$$(\exists x)(x = x)$$

Existuje aspoň jedna množina.

Axiómy systému ZFC

Axióma II (Axióma zjednotenia množín)

$$(\forall A)(\exists U)(\forall z)(z \in U \Leftrightarrow (\exists a \in A)(z \in a))$$

Pre ľubovoľnú množinu A existuje taká množina U, ktorá obsahuje práve tie prvky, ktoré patria do niektorej z množín patriacich do A.

Axióma III (Axióma dvojice)

$$(\forall a)(\forall b)(\exists C)(\forall z)[z \in C \Leftrightarrow (z = a) \vee (z = b)]$$

Ak a, b sú množiny, tak existuje množina ktorá obsahuje práve prvky a, b a žiadne iné. Túto množinu označíme $\{a, b\}$.

Axiómy systému ZFC

Tvrdenie

Pre ľubovoľné množiny A, B existuje taká množina C, do ktorej patria práve prvky patriace do množiny A alebo do množiny B. Túto množinu označujeme $A \cup B$ a nazývame zjednotenie množín A a B.

Tvrdenie

Pre každú množinu a existuje jediná množina A, ktorá obsahuje a ako jediný svoj prvok, t.j.

$$z \in A \Leftrightarrow z = a.$$

Túto množinu označujeme $\{a\}$.

Axiómy systému ZFC

Axióma V (Schéma axióm vymedzenia)

Nech $\varphi(x)$ je formula teórie množín, ktorá neobsahuje B ako voľnú premennú. Potom platí

$$(\forall A)(\exists B)(\forall z)(z \in B \Leftrightarrow z \in A \wedge \varphi(z))$$

Pre každú množinu A existuje množina B obsahujúca práve tie prvky z A, pre ktoré je pravdivý výrok $\varphi(z)$, ktorý dostaneme nahradením všetkých voľných výskytov premennej x premennou z. Túto množinu budeme označovať

$$B := \{x \in A; \varphi(x)\}.$$

Axiómy systému ZFC

Tvrdenie

Existuje (práve jedna) množina $\emptyset$ s vlastnosťou

$$(\forall z)(z \notin \emptyset).$$

Túto množinu nazývame prázdna množina.

Axiómy systému ZFC

Tvrdenie

Pre ľubovoľné dve množiny A, B existuje práve jedna množina C, ktorá obsahuje práve tie prvky, ktoré patria súčasne do A aj do B. Túto množinu nazývame prienik množín A a B a označujeme ju $A \cap B$.

Definícia

Množiny A a B sa nazývajú *disjunktné*, ak $A \cap B = \emptyset$, t.j. ak majú prázdny prienik.

Axiómy systému ZFC

Definícia

Ak A, B sú množiny, tak hovoríme, že A je *podmnožinou* B, ak každý prvok množiny A je prvkom množiny B. Tento fakt označíme $A \subseteq B$.

$$A \subseteq B \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} (\forall z)(z \in A \Rightarrow z \in B)$$

Axiómy systému ZFC

Axióma VI (Axióma potenčnej množiny)

$$(\forall A)(\exists P)(\forall z)(z \in P \Leftrightarrow z \subseteq A)$$

Pre každú množinu A existuje množina P pozostávajúca práve z podmnožín množiny A.

Definícia

Množinu všetkých podmnožín množiny A nazývame *potenčná množina* množiny A a označujeme $\mathcal{P}(A)$.

$$\mathcal{P}(A) = \{B; B \subseteq A\}$$

Axiómy systému ZFC

Axióma VIII (Schéma axióm substitúcie)

Nech $\varphi(x, y)$ je formula teórie množín, ktorá neobsahuje B ako voľnú premennú. Potom platí

$$(\forall A)[(\forall x \in A)(\exists! y)\varphi(x, y) \Rightarrow (\exists B)(\forall z)(z \in B \Leftrightarrow (\exists x \in A)\varphi(x, z))].$$

Trochu nepresne sa dá preformulovať tak, že ak A je množina a $f : A \to Y$ je zobrazenie na množine A, tak existuje množina $\{f(a); a \in A\}$, čiže obraz množiny A.

Axiómy systému ZFC

Axióma (Axióma regularity)

$$(\forall A)[(\exists B)(B \in A) \Rightarrow (\exists B \in A)\neg[(\exists c)(c \in A \wedge c \in B)]]$$

Každá neprázdna množina obsahuje množinu, ktorá je s ňou disjunktná.

$$(\forall A)[A \neq \emptyset \Rightarrow (\exists B \in A) B \cap A = \emptyset]$$

Z axiómy regularity sa dá odvodiť, že $(\forall x) x \notin x$.

Axiómy systému ZFC

Axióma X (Axióma nekonečnej množiny)

$$(\exists A)[\emptyset \in A \wedge (\forall x)(x \in A \Rightarrow x \cup \{x\} \in A)]$$

$$\begin{aligned}
A_0 &= \emptyset \\
A_1 &= A_0 \cup \{A_0\} = \{\emptyset\} \\
A_2 &= A_1 \cup \{A_1\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \\
A_3 &= A_2 \cup \{A_2\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Axiómy systému ZFC

Doteraz uvedené axiómy sa zvyknú označovať ako axiomatický systém ZF. Po pridaní nasledujúcej axiómy už dostaneme celý systém ZFC.

Axióma VIII (Axióma výberu)

$$(\forall \mathcal{S})[(\forall A \in \mathcal{S})(A \neq \emptyset) \wedge (\forall A \in \mathcal{S})(\forall B \in \mathcal{S})(A \neq B \Rightarrow A \cap B = \emptyset) \Rightarrow (\exists V)(\forall A \in \mathcal{S})(\exists x)(V \cap A = \{x\})]$$

Ak $\mathcal{S}$ je systém neprázdnych disjunktných množín, tak existuje množina V, ktorá má s každou z týchto množín jednoprvkový prienik.

Axiómy systému ZFC

Axiómu výberu môžeme ekvivalentne preformulovať takto:

Axióma VIII
Ak $\mathcal{S}$ je systém neprázdnych disjunktných množín, tak existuje zobrazenie $f : \mathcal{S} \to \bigcup \mathcal{S}$ také, že pre každé $A \in \mathcal{S}$ platí $f(A) \in A$.

Dokonca platí, že axióma výberu je ekvivalentná s tvrdením, ktoré dostaneme, ak v predchádzajúcej formulácii vynecháme podmienku disjunktnosti.

Definície

$$A \subseteq B \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} (\forall z)(z \in A \Rightarrow z \in B)$$

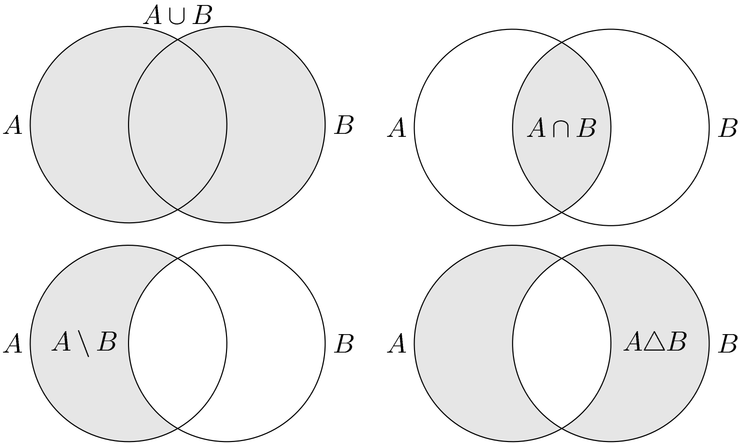
$$A \cup B = \{x; x \in A \vee x \in B\}$$

$$A \cap B = \{x; x \in A \wedge x \in B\}$$

$$A \setminus B = \{x; x \in A \wedge x \notin B\}$$

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

Vennove diagramy



Vlastnosti inklúzie

Tvrdenie

Nech A, B, C sú ľubovoľné množiny. Potom platí:

- *Pre každú množinu platí $A \subseteq A$.*
- *$A = B$ práve vtedy, keď $A \subseteq B \wedge B \subseteq A$.*
- *Ak platí $A \subseteq B$ a $B \subseteq C$, tak $A \subseteq C$.*

Identity pre $\cup$ *a* $\cap$

Tvrdenie

Nech A, B, C sú množiny. Potom platí:

(i) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$, $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (*asociatívnosť operácií* $\cup$ *a* $\cap$);

(ii) $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$ (*komutatívnosť operácií* $\cup$ *a* $\cap$);

(iii) $\emptyset \cup A = A$, $\emptyset \cap A = \emptyset$;

(iv) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (*distributívnosť*);

(v) $A \cap A = A$, $A \cup A = A$ (*idempotentosť operácií* $\cup$ *a* $\cap$)

(vi) $A \cap (A \cup B) = A$, $A \cup (A \cap B) = A$ (*zákony absorpcie*).

Zjednotenie a prienik systému množín

$$\bigcup \mathcal{S} = \bigcup_{A \in \mathcal{S}} A := \{z; (\exists A \in \mathcal{S}) z \in A\}$$

$$\bigcup_{i \in I} A_i := \{z; (\exists i \in I) z \in A_i\}$$

$$\bigcap \mathcal{S} = \bigcap_{A \in \mathcal{S}} A := \{z; (\forall A \in \mathcal{S}) z \in A\}$$

$$\bigcap_{i \in I} A_i := \{z; (\forall i \in I) z \in A_i\}$$

$\bigcap \mathcal{S}$ definujeme len pre $\mathcal{S} \neq \emptyset$

Zjednotenie a prienik systému množín

Tvrdenie

Nech $\mathcal{S}$ a B sú ľubovoľné množiny. Potom platí:

$$B \cap \bigcup_{A \in \mathcal{S}} A = \bigcup_{A \in \mathcal{S}} (B \cap A);$$
$$B \cup \bigcap_{A \in \mathcal{S}} A = \bigcap_{A \in \mathcal{S}} (B \cup A).$$

Inklúzia, prienik a zjednotenie

Tvrdenie

Nech A a B sú množiny. Nasledujúce podmienky sú ekvivalentné:

(i) $A \subseteq B$;

(ii) $A = A \cap B$;

(iii) $B = A \cup B$.

Tvrdenie

Nech A, B, C sú množiny. Potom platí:

(i) $\emptyset \subseteq A$;

(ii) $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$;

(iii) *Ak* $A \subseteq B$, *tak* $A \cap C \subseteq B \cap C$ *a* $A \cup C \subseteq B \cup C$.

Identity pre množinový rozdiel

(i) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$,
$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$;

(ii) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$;

(iii) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$;

(iv) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$,
$(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$;

(v) $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$;

(vi) $(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus B = A \cap (C \setminus B)$;

(vii) $(A \setminus B) \cup C = (A \cup C) \setminus (B \setminus C)$;

Identity pre množinový rozdiel

(viii) $A \cup B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B)$;

(ix) $A \subseteq B \Leftrightarrow A \setminus B = \emptyset$.

(x) $A \setminus \bigcap_{i \in I} B_i = \bigcup_{i \in I} (A \setminus B_i)$, $A \setminus \bigcup_{i \in I} B_i = \bigcap_{i \in I} (A \setminus B_i)$.

(xi) Ak $B \subseteq C$, tak $A \setminus C \subseteq A \setminus B$.

(xii) Ak $B \subseteq C$, tak $B \setminus A \subseteq C \setminus A$.

Identity pre symetrickú diferenciu

Tvrdenie

Nech A, B, C sú množiny. Potom platí:

(i) $A \triangle B = B \triangle A$;

(ii) $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$;

(iii) $A \triangle A = \emptyset$, $A \triangle \emptyset = A$;

(iv) $A \cup B = A \triangle B \triangle (A \cap B)$;

(v) $A \setminus B = A \triangle (A \cap B)$.

Usporiadaná dvojica

Definícia

Nech a, b sú množiny. Potom množinu

$$(a,b) := \{\{a\},\{a,b\}\}$$

nazývame *usporiadanou dvojicou* množín a a b.

Tvrdenie

Nech a, b, c, d sú množiny. Potom

$$(a,b) = (c,d) \qquad \Leftrightarrow \qquad a = c \wedge b = d.$$

Karteziánsky súčin

Definícia

Karteziánsky súčin množín A a B je množina, ktorej prvkami sú práve také usporiadané dvojice, kde prvý prvok patrí do množiny a a druhý prvok patrí do množiny b. Túto množinu označujeme

$$A \times B := \{(a, b); a \in A, b \in B\}.$$

Karteziánsky súčin

Tvrdenie

Nech A, B, C sú množiny. Potom platí

(i) $A \times \emptyset = \emptyset \times A = \emptyset$;

(ii) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$;

(iii) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$;

(iv) $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$.

(v) *Ak navyše* $A, B, C, D \neq \emptyset$, *tak platí*

$$A \times B = C \times D \Leftrightarrow A = C \wedge B = D$$

Karteziánsky súčin vo všeobecnosti nie je asociatívny ani komutatívny:

$A \times B \neq B \times A$

$A \times (B \times C) \neq (A \times B) \times C$