Prirodzené čísla v ZFC

26. novembra 2013

Peanove axiómy

Definícia

Nech N je množina, 0 je nejaký prvok N a S je zobrazenie definované na N. Hovoríme, že trojica $(N, 0, S)$ spĺňa *Peanove axiómy*, ak platí:

(P1) $0 \in N$;

(P2) Ak $n \in N$, tak aj $S(n) \in N$.

(P3) Ak $n \in N$, tak $S(n) \neq 0$.

(P4) Ak $m, n \in N$ a $S(m) = S(n)$, tak $m = n$.

(P5) Ak $A \subseteq N$ je podmnožina množiny N taká, že $0 \in A$ a pre každé $n \in A$ aj $S(n) \in A$, tak $A = N$.

Peanove axiómy

Tvrdenie

Nech $(N, 0, S)$ *spĺňa Peanove axiómy. Potom pre každé* $a \in N$ *nastane práve jedna z možností* $a = 0$ *alebo* $a = S(n)$ *pre nejaké* $n \in N$.

Tvrdenie

Nech $(N, 0, S)$ *spĺňa Peanove axiómy a* X *je ľubovoľná množina. Nech* $b \in X$ *a nech* $g \colon N \times X \to X$ *je funkcia. Potom existuje práve jedna funkcia* $f \colon N \to X$ *taká, že* $f(0) = b$ *a pre každé* $n \in N$ *platí* $f(S(n)) = g(n, f(n))$.

Definícia sčitovania

Tvrdenie

Nech $(N, 0, S)$ *spĺňa Peanove axiómy. Potom existuje práve jedna binárna operácia* $+$ *na* N *taká, že pre ľubovoľné* $a, n \in N$ *platí*

(A1) $a + 0 = a$;

(A2) $a + S(n) = S(a + n)$.

Komutatívnosť sčitovania

Tvrdenie

$$0 + a = a \tag{K1}$$

$$S(0) + a = S(a) \tag{K2}$$

$$a + S(b) = S(a) + b \tag{K3}$$

$$a + b = b + a \tag{K}$$

Vlastnosti sčitovania

Tvrdenie

$$(a+b)+c = a+(b+c) \tag{A}$$

$$b+a = c+a \Rightarrow b = c \tag{C}$$

Lema

$$a+b=0 \qquad \Rightarrow \qquad a=0 \wedge b=0$$

Definícia nerovnosti

Definícia

$$a \leq b \Leftrightarrow (\exists c \in N) b = a + c. \tag{I}$$

Vlastnosti nerovnosti

$$a \leq a \tag{IR}$$

$$a \leq b \wedge b \leq a \Rightarrow a = b \tag{IA}$$

$$a \leq b \wedge b \leq c \Rightarrow a \leq c \tag{IT}$$

$$0 \leq a \tag{1}$$

$$a \leq 0 \Rightarrow a = 0 \tag{2}$$

$$a \leq S(a) \tag{3}$$

$$a \leq b \Leftrightarrow S(a) \leq S(b) \tag{4}$$

$$a \leq S(b) \Rightarrow a \leq b \vee a = S(b) \tag{5}$$

$$a \leq b \vee S(b) \leq a \tag{6}$$

$$a \leq b \vee b \leq a \tag{IL}$$

Vlastnosti nerovnosti

Dôsledok

Množina $(N, \leq)$ *je lineárne usporiadaná množina.*

Tvrdenie

Množina $(N, \leq)$ *je dobre usporiadaná.*

$$a \leq b \quad \Leftrightarrow \quad c + a \leq c + b \tag{M}$$

$$a < b \quad \Leftrightarrow \quad c + a < c + b \tag{M'}$$

Vlastnosti nerovnosti

Dôsledok

$$a_1 \leq a_2 \wedge b_1 \leq b_2 \Rightarrow a_1 + b_1 \leq a_2 + b_2.$$

Dôsledok

$$a_1 < a_2 \wedge b_1 \leq b_2 \Rightarrow a_1 + b_1 < a_2 + b_2.$$

Definícia násobenia

Tvrdenie

Nech $(N, 0, S)$ spĺňa Peanove axiómy. Potom existuje práve jedna binárna operácia $\cdot$ na N taká, že pre ľubovoľné $a, b \in N$ platí

(M1) $a \cdot 0 = 0$;

(M2) $a \cdot S(b) = a \cdot b + a$.

Komutatívnosť a asociatívnosť

Tvrdenie

(i) $a \cdot S(0) = a$

(ii) $0 \cdot a = 0$

(iii) $S(b) \cdot a = b \cdot a + a$

(iv) $a \cdot b = b \cdot a$

Tvrdenie

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \tag{D}$$

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c \tag{MA}$$

Násobenie a nerovnosť

Tvrdenie

$$a \leq b \quad \Rightarrow \quad c \cdot a \leq c \cdot b \tag{7}$$

Tvrdenie

$$c \neq 0 \land a \cdot c = b \cdot c \Rightarrow a = b \tag{8}$$

$$c \neq 0 \land a < b \quad \Rightarrow \quad c \cdot a < c \cdot b \tag{9}$$

$$c \neq 0 \land c \cdot a < c \cdot b \quad \Rightarrow \quad a < b \tag{10}$$

$$c \neq 0 \land c \cdot a \leq c \cdot b \quad \Rightarrow \quad a \leq b \tag{11}$$