



# *Prirodzené čísla v ZFC*

26. novembra 2013



## Induktívne množiny

*Axióma X (Axióma nekonečnej množiny)*

$$(\exists A)[\emptyset \in A \wedge (\forall x)(x \in A \Rightarrow x \cup \{x\} \in A)]$$

*Definícia*

Množinu, ktorá spĺňa podmienku

$$\emptyset \in A \wedge (\forall x)(x \in A \Rightarrow x \cup \{x\} \in A)$$

budeme nazývať *induktívna množina*.

## Definícia množiny $\mathbb{N}$

### Definícia

Množina *prirodzených čísel*  $\mathbb{N}$  je taká induktívna množina, že pre každú induktívnu množinu  $B$  platí  $\mathbb{N} \subseteq B$ .

Prvky tejto množiny nazývame *prirodzené čísla*.

Pre každé prirodzené číslo  $n$  budeme  $S(n) = n \cup \{n\}$  nazývať *nasledovníkom* čísla  $n$ .

## Definícia množiny $\mathbb{N}$

### *Lema*

*Prienik ľubovoľného neprázdneho systému induktívnych množín je induktívna množina.*

### *Tvrdenie*

*Existuje práve jedna množina  $\mathbb{N}$  taká, že  $\mathbb{N}$  je induktívna a pre každú induktívnu množinu platí  $\mathbb{N} \subseteq B$ .*

## *Definícia množiny $\mathbb{N}$*

$$0 = \emptyset,$$

$$1 = 0 \cup \{0\} = \{0\},$$

$$2 = 1 \cup \{1\} = \{0, 1\},$$

$$3 = 2 \cup \{2\} = \{0, 1, 2\}, \dots$$

$$0, 1, 2, 3, \dots \in \mathbb{N}$$

## Indukcia na $\mathbb{N}$

*Veta (Indukcia na množine prirodzených čísel)*

*Nech  $A \subseteq \mathbb{N}$  je množina taká, že*

- (i)  $\emptyset \in A$ ;*
- (ii)  $(\forall n \in \mathbb{N}) n \in A \Rightarrow S(n) \in A$ ;*

*t.j.  $A$  obsahuje 0 a s každým prirodzeným číslom obsahuje aj jeho nasledovníka.*

*Potom platí  $A = \mathbb{N}$ .*

## $\mathbb{N}$ splňa Peanove axiomy

### Lema

Pre ľubovoľné prirodzené čísla  $m, n, k$  platí

- (i)  $n \notin n$ ;
- (ii)  $n = \emptyset \vee (\exists n_1 \in \mathbb{N})n = S(n_1)$
- (iii)  $n \subseteq \mathbb{N}$ ;
- (iv)  $m \in n \Rightarrow S(m) \subseteq n$ ;
- (v) Ak  $m \in n$  a  $n \in k$ , tak  $m \in k$ .
- (vi)  $m \subseteq n \Rightarrow m = n \vee m \in n$ ;
- (vii)  $n = \emptyset \vee \emptyset \in n$ .

## $\mathbb{N}$ spĺňa Peanove axiomy

### *Dôsledok*

Pre ľubovoľné  $m, n \in \mathbb{N}$  platí:

- (i)  $m \subsetneq n \Leftrightarrow m \in n$ .
- (ii)  $m \in n \Rightarrow S(m) \in S(n)$ .

### *Tvrdenie*

Pre ľubovoľné prirodzené čísla  $m, n$  platí

$$S(m) = S(n) \quad \Rightarrow \quad m = n.$$

Teda  $(\mathbb{N}, \emptyset, S)$  spĺňa Peanove axiomy.



## *Definícia usporiadania*

### *Definícia*

Na množine  $\mathbb{N}$  definujeme reláciu  $<$  tak, že pre  $m, n \in \mathbb{N}$

$$m < n \Leftrightarrow m \in n.$$

Reláciu  $\leq$  zavedieme tak, že

$$m \leq n \Leftrightarrow m = n \vee m < n.$$

## *Definícia usporiadania*

$$m \leq n \Leftrightarrow m \subseteq n \tag{1}$$

$$m < n \Leftrightarrow m \in n \Leftrightarrow m \subsetneq n. \tag{2}$$

Už máme dokázané, že  $(\mathbb{N}, \leq)$  je čiastočne usporiadaná množina.

## *Linearita a dobrota*

### *Tvrdenie*

*Pre ľubovoľné  $m, n \in \mathbb{N}$  platí*

$$m \in n \vee m = n \vee n \in m.$$

### *Tvrdenie*

*Množina  $(\mathbb{N}, \leq)$  je dobre usporiadaná množina.*