

## Binárne operácie

1. Vypíšte všetky možné binárne operácie na množine  $\{0, 1\}$ . Ktoré z nich sú asociatívne, komutatívne, majú neutrálny prvok? Pre ktoré existuje ku každému prvku aj inverzný?
- 2\*. Ak viete, že ide o tabuľku asociatívnej binárnej operácie, doplňte chýbajúce výsledky (ak sa to dá).

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
|   | a | b | c |
| a | b | a | c |
| b |   |   |   |
| c |   |   |   |

## Grupy

1. Ktoré z uvedených množín tvoria vzhľadom na dané operácie grupu? V ktorých prípadoch je táto grupa komutatívna?
  - a)  $(\mathbb{Z}, \cdot)$  (celé čísla s obvyklým násobením)
  - b)  $(\mathbb{R}, \cdot)$  (reálne čísla s obvyklým násobením)
  - c)  $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ , d)  $(\mathbb{C}, +)$ , e)  $(\mathbb{C}, \cdot)$ , f)  $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$
  - g)  $(\mathbb{R}^2, +)$  (so sčítovaním definovaným po zložkách)
  - h)  $\mathbb{R}$  s operáciou  $*$ ,  $a * b = a + b - 1$
  - i)  $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$  s operáciou  $*$ ,  $a * b = ab + a + b$
  - j) Množina všetkých párnych celých čísel vzhľadom na sčítovanie.
  - k) Množina všetkých nepárnych celých čísel vzhľadom na sčítovanie.
  - l)  $(\mathbb{Z}_5, \oplus)$
2. Tvoria všetky permutácie na konečnej množine  $M$  grupu? Je táto grupa komutatívna? Urobte tabuľku grupovej operácie v prípade  $M = \{1, 2, 3\}$ .
3. Je  $(\mathbb{R}, *)$ , kde  $a * b = ab + a + b$ , grupa? Ak nie, vedeli by ste vynechať niektorý prvok  $a$  z množiny  $\mathbb{R}$  tak, aby  $(\mathbb{R} \setminus \{a\}, *)$  bola grupa?
4. Nech  $G = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ . Je  $G$  s operáciou  $\cdot$  (násobenie komplexných čísel) grupa? Označme  $C_n = \{z \in \mathbb{C} : z^n = 1\}$ . Je  $(C_n, \cdot)$  grupa?
5. Dokážte, že ak  $(G, \cdot)$  je grupa a  $x, y, z \in G$  tak platí

$$xy = xz \Rightarrow y = z;$$

$$yx = zx \Rightarrow x = z.$$

(Tzv. zákony o krátení v grupe.)

6. Nech  $(G, *)$  je grupa a  $e$  je jej neutrálny prvok. Dokážte:
  - a)  $x * y = y * x \Leftrightarrow x * y * x^{-1} * y^{-1} = e$ .
  - b) Ak  $x * x = e$  pre všetky  $x \in G$ , tak  $G$  je komutatívna.
7. Ak  $(G, \circ)$  je grupa a  $a \in G$  je nejaký jej prvok, tak zobrazenie  $f_a: G \rightarrow G$  definované ako  $f_a(b) = a \circ b$  je bijekcia.
8. Nech  $(G, \circ)$  je grupa. Dokážte, že zobrazenie  $f: G \rightarrow G$  definované ako  $f(a) = a^{-1}$  je bijekcia.
- 9\*. Nech  $G$  je neprázdna množina a  $\circ$  je asociatívna binárna operácia na  $G$ . Potom  $G$  je grupa práve vtedy, keď pre ľubovoľné  $a, b \in G$  majú rovnice

$$a \circ x = b$$

$$y \circ a = b$$

riešenie v  $G$  (inými slovami, pre ľubovoľné  $a, b \in G$  existujú  $x, y \in G$ , ktoré spĺňajú tieto dve rovnosti.)

- 10\*. Nech  $G$  je konečná množina a  $\circ$  je binárna operácia na  $G$  taká, že platí asociatívny zákon a zákony o krátení. Dokážte, že  $G$  je grupa.
- 11\*. Nech  $*$  je binárna operácia na množine  $G$ , ktorá je a) asociatívna,  
 b) má ľavý neutrálny prvok t.j. existuje prvok  $e \in G$  taký, že  $(\forall x \in G)e * x = x$   
 c) pre každý prvok  $x \in G$  existuje  $y \in G$  také, že  $x * y = e$  (kde  $e$  označuje prvok z časti b) t.j.

$$(\forall x \in G)(\exists y \in G)y * x = e$$

(stručne môžeme povedať, že ku každému prvku existuje ľavý inverzný prvok vzhľadom na  $e$ ).

Dokážte, že potom  $(G, *)$  je grupa.

12. Dokážte, že v konečnej grupe, ktorá má párny počet prvkov, existuje prvok rôzny od neutrálného prvku taký, že  $a \circ a = e$ .
13. Nech konečná množina  $G = \{e, a_1, \dots, a_n\}$  tvorí s operáciou  $*$  komutatívnu grupu a  $e$  je jej neutrálny prvok. Dokážte, že  $(a_1 * a_2 * \dots * a_n)^2 = e$ .
14. Nech  $*$  je binárna operácia na množine  $A$ , taká, že pre každé  $a, b, c \in A$  platí  $a * (b * c) = (a * c) * b$  a  $*$  má neutrálny prvok. Dokážte, že operácia  $*$  je komutatívna a asociatívna.
15. Nech  $(G, \circ)$  je grupa. Dokážte, že ak  $x \circ x = x$ , tak  $x = e$ .
16. Zistite, či  $(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \square)$ , kde pre každé  $(a, b), (c, d) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$  definujeme  $(a, b) \square (c, d) = (2ac, b + d)$ , je grupa.
17. Nech  $G = \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$ . Definujme na tejto množine binárnu operáciu  $*$  predpisom  $(a, b) * (c, d) = (a + bc, bd)$ . Je to skutočne binárna operácia? Je  $(G, *)$  grupa? Je to komutatívna grupa?
18. Nech  $(G, *_G)$  a  $(H, *_H)$  sú grupy. Dokážte, že aj  $G \times H$  s operáciou  $*$  definovanou ako

$$(g_1, h_1) * (g_2, h_2) = (g_1 *_G g_2, h_1 *_H h_2)$$

je grupa.

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
|   | a | b | c | d |
| a |   |   |   |   |
| b |   |   |   | d |
| c |   |   | d |   |
| d |   |   |   |   |

19. Doplňte nasledujúcu tabuľku tak aby ste dostali grupu.

20. Ak pre každý prvok  $x$  grupy  $(G, \circ)$  platí  $x \circ x = e$ , tak táto grupa je komutatívna.
21. Nech  $G$  je grupa,  $e$  je jej neutrálny prvok a  $a, b \in G$ . Ukážte, že ak  $(ab)^2 = e$ , tak aj  $(ba)^2 = e$ .