

Lineárna závislosť a nezávislosť

1. Overte, že \mathbb{R} je vektorový priestor nad poľom \mathbb{Q} . Dokážte, že v tomto priestore sú 1 , $\sqrt{2}$ a $\sqrt{3}$ lineárne nezávislé.
2. Ukážte, že vo vektorovom priestore \mathbb{R} nad \mathbb{Q} (z predošlej úlohy) sú lineárne nezávislé vektory $1 + 3\sqrt{2}$ a $2 - \sqrt{2}$.
3. Sú 1 , $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{6}$ lineárne nezávislé vo vektorovom priestore \mathbb{R} nad poľom \mathbb{Q} ? (Hint: Úlohu môže o niečo zjednodušiť, ak sa pozriete na 1 a $\sqrt{3}$ ako prvky priestoru \mathbb{R} nad poľom $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2}; a, b \in \mathbb{Q}\}$.)

Báza a dimenzia

1. Zistite, či dané vektory tvoria bázu v \mathbb{R}^3 :
 - a) $(1,2,3)$, $(1,-2,3)$, $(1,2,-3)$
 - b) $(1,1,1)$, $(1,1,0)$, $(1,0,1)$
 - c) $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$, $(1,1,1)$.
2. Zistite, či dané vektory tvoria bázu v \mathbb{Z}_5^3 :
 - a) $(1,2,3)$, $(2,3,4)$, $(0,3,1)$
 - b) $(1,0,0)$, $(0,1,2)$, $(2,1,3)$
 - c) $(0,1,2)$, $(3,0,1)$, $(1,0,2)$.
3. P_n označme priestor všetkých polynómov stupňa najviac n . Overte, že $d(P_n) = n + 1$ a že $1, x - 1, \dots, (x - 1)^n$ je báza tohoto priestoru.
4. Určte dimenziu podpriestoru $[\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}]$, ak $\vec{\alpha} = (1, 3, 2, 1)$, $\vec{\beta} = (4, 9, 5, 4)$ a $\vec{\gamma} = (3, 7, 4, 3)$ v \mathbb{R}^4 .
5. Ak sa to dá, doplňte dané vektory na bázu príslušného vektorového priestoru:
 - a) $(1,1,2)$, $(2,1,3)$ v \mathbb{R}^3 ,
 - b) $x^2 - 1, x^2 + 1$ v priestore polynómov stupňa najviac 3,
 - c) $(1,2,3,0)$, $(3,4,1,2)$ v \mathbb{Z}_5^4 .
6. Ak každý z vektorov $\vec{\beta}_1, \dots, \vec{\beta}_k$ je lineárnou kombináciou vektorov $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_m$, tak $d([\vec{\beta}_1, \dots, \vec{\beta}_k]) \leq d([\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_m])$.

Súčty podpriestorov

1. Zistite¹ $d(U)$, $d(V)$, $d(U + V)$, $d(U \cap V)$, bázu $U + V$ a bázu $U \cap V$
 - a) v \mathbb{R}^2 pre $U = [(2, 5)]$, $V = [(1, 3)]$
 - b) v \mathbb{R}^3 pre $U = [(1, 2, 3), (-1, 2, 3)]$, $V = [(2, 1, 4), (-2, 1, 4)]$
 - c) v \mathbb{R}^4 pre $U = [(1, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 1)]$, $V = [(1, 1, 1, 0), (1, 0, 1, 1)]$
 - d) v \mathbb{R}^4 pre $U = [(1, 2, 3, 4), (1, 1, 1, 1), (4, 3, 2, 1)]$, $V = [(1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1), (1, 0, 0, 0)]$.
[a)1,1,2,0; b)2,2,3,1; c)2,2,3,1; d)2,3,4,1]
2. Nech $T = [(1, 3, 2), (2, 1, 3), (3, 4, 0)]$ je podpriestor $(\mathbb{Z}_5)^3$. Existuje podpriestor S taký, že $(\mathbb{Z}_5)^3 = T \oplus S$? Ak áno, nájdite ho! Je tento podpriestor jednoznačne určený?
3. Dokážte, že ak $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_k$ je báza vektorového priestoru V , tak $V = [\vec{e}_1] \oplus \dots \oplus [\vec{e}_k]$.

¹Pri tejto úlohe sa môže hodiť používať elementárne riadkové operácie a úpravu na redukovaný stupňovitý tvar.