

Lineárne zobrazenia

1. Nech V a W sú vektorové priestory nad poľom F a $f: V \rightarrow W$ je lineárne zobrazenie. Ak $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n$ sú lineárne závislé vektory, tak aj $f(\vec{\alpha}_1), \dots, f(\vec{\alpha}_n)$ sú lineárne závislé vektory.
2. Nech $f: V \rightarrow W$ je lineárne zobrazenie z vektorového priestoru V do vektorového priestoru W nad poľom F . Dokážte:
Ak S je podpriestor vektorového priestoru V , tak $f[S] = \{f(\vec{\alpha}); \vec{\alpha} \in S\}$ je podpriestor vektorového priestoru W .
Ak T je podpriestor vektorového priestoru W , tak $f^{-1}[T] = \{\vec{\alpha} \in V : f(\vec{\alpha}) \in T\}$ je podpriestor vektorového priestoru V .

Súčin matic

1. Vypočítajte $A^2 + 2AB + B^2$, $A^2 + 2BA + B^2$, $A^2 + AB + BA + B^2$, $(A + B)^2$, ak $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
2. Pre štvorcovú maticu C typu $n \times n$ budeme výraz $\text{Tr}(C) = \sum_{k=1}^n c_{kk}$ nazývať *stopa matice C*.
Ukážte, že ak A, B sú matice typu $n \times n$ nad poľom F , tak platia rovnosti $\text{Tr}(A) = \text{Tr}(A)^T$ a $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$.
Zistite, či pre ľubovoľné matice A, B, C typu $n \times n$ platia vzťahy $\text{Tr}(ABC) = \text{Tr}(CBA)$ a $\text{Tr}(ABC) = \text{Tr}(ACB)$. (Svoje tvrdenie zdôvodnite!) Ak niektorý z týchto vzťahov neplatí, bude platiť za dodatočného predpokladu, matica A je symetrická?
3. Nech $C = AB$, kde A, B sú matice. Musí potom platiť $V_C \subseteq V_A$? Musí platiť $S_C \subseteq S_B$? Musí platiť $S_A \subseteq S_C$, $S_B \subseteq S_C$? (Pripomeňme, že S_A je podpriestor generovaný riadkami matice A .)
4. Nech A, B sú matice nad poľom F typu $m \times n$ resp. $n \times k$. Dokážte, že $h(AB) \leq h(A)$. Dokážte, že ak $n = k$ a B je regulárna, tak $h(AB) = h(A)$.
5. Nech A, B sú matice nad poľom F typu $m \times n$ resp. $n \times k$. Dokážte, že $h(AB) \leq h(B)$. Dokážte, že ak $m = n$ a A je regulárna, tak $h(AB) = h(B)$.

Matica zobrazenia

1. Nájdite maticu lineárneho zobrazenia $f: (\mathbb{Z}_7)^2 \rightarrow (\mathbb{Z}_7)^2$ a napíšte jeho predpis.
a) $f(1, 1) = (0, 1)$, $f(6, 1) = (3, 2)$
b) $f(2, 3) = (1, 0)$, $f(3, 2) = (6, 1)$
2. Nájdite maticu lineárneho zobrazenia $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$, pre ktoré platí:
a) $f(2, 0, 3) = (1, 2, -1, 1)$, $f(4, 1, 5) = (4, 5, -2, 1)$, $f(3, 1, 2) = (1, -1, 1, -1)$,
b) $f(2, 0, 3) = (1, 2, -1, 1)$, $f(4, 1, 5) = (4, 5, -2, 1)$, $f(2, -1, 4) = (-1, 1, -1, 2)$,
c) $f(2, 0, 3) = (1, 2, -1, 1)$, $f(4, 1, 5) = (4, 5, -2, 1)$, $f(2, -1, 4) = (1, -1, 1, -1)$.
3. Nájdite maticu lineárneho zobrazenia $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ takého, že:
a) $f(1, 2, 3, 3) = (0, 0, 0, 0)$, $f(1, 1, 3, 2) = (1, 0, 3, 1)$, $f(1, 1, 2, 0) = (2, 0, 1, 0)$, $f(1, 0, 3, 1) = (2, 1, 3, 1)$ b) $f(1, 2, 3, 4) = (-1, -1, 4, 1)$, $f(1, 1, 3, 2) = (1, 0, 3, 1)$, $f(1, 1, 2, 0) = (2, 0, 1, 0)$,
 $f(1, 0, 3, 1) = (2, 1, 3, 1)$ c) $f(0, 1, 1, 1) = (1, 0, 0, 0)$, $f(1, 0, 1, 1) = (0, 1, 0, 0)$, $f(1, 1, 0, 1) = (0, 0, 1, 0)$, $f(1, 1, 1, 0) = (0, 0, 0, 1)$
4. Koľko existuje lineárnych zobrazení spĺňajúcich zadané podmienky? Koľko z nich je injektívnych? Koľko je surjektívnych?
a) $f: \mathbb{Z}_5^3 \rightarrow \mathbb{Z}_5^4$, $f(1, 3, 1) = (1, 1, 1, 3)$, $f(2, 1, 3) = (0, 1, 3, 4)$, $f(2, 1, 0) = (1, 4, 0, 0)$;
b) $f: \mathbb{Z}_5^4 \rightarrow \mathbb{Z}_3^3$, $f(1, 0, 3, 1) = (0, 1, 3)$, $f(2, 1, 3, 1) = (1, 1, 3)$, $f(1, 1, 4, 1) = (2, 2, 1)$;
c) $f: \mathbb{Z}_5^4 \rightarrow \mathbb{Z}_5^3$, $f(1, 0, 3, 1) = (0, 1, 3)$, $f(2, 1, 3, 1) = (1, 1, 3)$, $f(1, 1, 0, 0) = (1, 0, 0)$;

Jadro a obraz

- Nájdite bázu obrazu a bázu jadra lineárneho zobrazenia $f: (\mathbb{Z}_5)^4 \rightarrow (\mathbb{Z}_5)^4$ s danou maticou. V ktorých prípadoch je toto zobrazenie surjektívne a v ktorých injektívne?

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$
- Nájdite bázu a dimenziu $\text{Ker } f$ aj $\text{Im } f$ pre dané lineárne zobrazenie. Rozhodnite, či toto zobrazenie je injektívne, surjektívne, bijektívne.
 - $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4, 2x_2 + x_3 + x_4, 4x_2 + 2x_3 + 2x_4)$.
 - $f: M_{2,2}(\mathbb{R}) \rightarrow M_{2,2}(\mathbb{R})$, $f: \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a+b & b+c \\ c+d & d+a \end{pmatrix}$
 - $f: V \rightarrow V$, kde $V = \{ax^2 + bx + c; a, b, c \in \mathbb{R}\}$ je podpriestor $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ a $f: p(x) \mapsto p'(x)$. (T.j. f priradí polynómu $p(x)$ jeho deriváciu.)
- Definujme lineárne zobrazenie $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ako $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (3x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4, 2x_1 + 4x_2 + x_3 - x_4)$ a označme $U_1 = \text{Ker } f$.
 Ďalej definujme lineárne zobrazenie $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ ako $g(y_1, y_2) = (y_1 - y_2, y_1 - 3y_2, 2y_1 - 8y_2, 3y_1 - 27y_2)$ a označme $U_2 = \text{Im } g$.
 Vidíme, že U_1 aj U_2 sú podpriestory \mathbb{R}^4 .
 Nájdite bázy priestorov $U_1, U_2, U_1 \cap U_2$ a $U_1 + U_2$.
- Nech $f: V \rightarrow V$ je lineárne zobrazenie. Ako f^2 budeme označovať $f \circ f$. Dokážte
 - $\text{Ker } f^2 \supseteq \text{Ker } f$,
 - $\text{Im } f^2 \subseteq \text{Im } f$,
 - $f^2 = 0 \Leftrightarrow \text{Ker } f \supseteq \text{Im } f$.

Inverzná matica

- Nájdite inverznú maticu k daným maticiam nad R :

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & \sqrt{6} \\ 0 & 1 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
 Výsledky:

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ -\frac{5}{4} & \frac{1}{4} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{10} \\ -1 & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 5 & -9 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & -3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -1 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
- Nech $f: (\mathbb{Z}_5)^4 \rightarrow (\mathbb{Z}_5)^4$ je lineárne zobrazenie také, že $f(1, 2, 3, 1) = (2, 0, 1, 0)$, $f(0, 2, 3, 1) = (1, 2, 0, 3)$, $f(1, 0, 3, 4) = (3, 2, 1, 0)$, $f(4, 1, 3, 2) = (2, 3, 1, 1)$. Nájdite maticu zobrazenia f^{-1} .
- Zistite, či $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ je regulárna a) nad \mathbb{Z}_2 b) nad \mathbb{Z}_3 , ak áno, nájdite inverznú.
- * Vypočítajte $A^{-1}B$ a $B^{-1}A$. Skúste to urobiť bez výpočtu A^{-1} resp. B^{-1} .
 $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$
 Ako skúšku správnosti môžete vyskúšať, či po vynásobení výsledku zľava maticou A (resp. B) dostanete maticu B (resp. A).