

Afinné priestory

1. Nech

$$\mathcal{B} = \{(x_1, x_2, x_3, 1); x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$$

$$V = \{(x_1, x_2, x_3, 0); x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$$

Dostaneme takto afinný priestor? (Ako operácie použijeme obvyklé sčítanie štvoric.)

Vedeli by ste nájsť aspoň dva rôzne afinné izomorfizmy $(\mathcal{B}, V) \rightarrow (\mathcal{B}, V)$?

2. Nech

$$\mathcal{B} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_1 + x_2 - 2x_3 = 5\}$$

a

$$V = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_1 + x_2 - 2x_3 = 0\}.$$

Dokážte, že (\mathcal{B}, V) s obvyklým sčítaním trojíc reálnych čísel je dvojrozmerný afinný priestor nad poľom \mathbb{R} .

3. Nech P_4 je množina všetkých reálnych polynómov stupňa najviac 4. (Na tejto množine máme obvyklú operáciu sčítania polynómov.) Nech $\mathcal{B} := \{f(x) \in P_4; f(0) = 1\}$ a $V := \{f(x) \in P_4; f(0) = 0\}$. Overte, že (\mathcal{B}, V) je štvorrozmerný afinný priestor (ak uvažujeme obvyklé operácie).

Afinné zobrazenia

1. Ukážte, že ak (f, φ) je afinný izomorfizmus, tak aj (f^{-1}, φ^{-1}) je afinný izomorfizmus.
2. Nech $(f, \varphi): \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ je afinné zobrazenie. Nech C je afinný podpriestor priestoru \mathcal{B} . Je aj $f^{-1}[C]$ afinný podpriestor priestoru \mathcal{A} ?

Afinné a barycentrické súradnice

1. Majme afinný priestor (\mathcal{B}, V) , kde

$$\mathcal{B} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_1 + x_2 - 2x_3 = 5\},$$

$$V = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_1 + x_2 - 2x_3 = 0\},$$

a berieme obvyklé operácie (t.j. ide o afinný podpriestor $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$.)

- a) Overte, že trojica $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, kde $O = (1, 2, -1)$, $\vec{e}_1 = (1, 1, 1)$, $\vec{e}_2 = (1, -1, 0)$, tvorí afinný súradnicový systém v tomto priestore.
 - b) Vyjadrite súradnice bodu $P = (3, 4, 1)$ v tejto súradnicovej sústave.
 - c) Definujme $f: \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}^3$ ako $f(x_1, x_2, x_3) = (-x_1 + 2x_2, 2x_1 - 3x_2 - 1)$. Predstavujú hodnoty $f(x_1, x_2, x_3)$ súradnice bodu (x_1, x_2, x_3) v nejakej vhodnej súradnicovej sústave? Ak áno, nájdite taký afinný súradnicový systém $(O', \vec{e}'_1, \vec{e}'_2)$.
 - d) Ako by to bolo so zobrazením $g: \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}^3$ definovaným ako $g(x_1, x_2, x_3) = (x_1x_2 + 1, x_1 - x_2 + 2)$?
2. V rovine určenej bodmi $A = (2, 1, 3)$, $B = (2, 4, 0)$, $C = (-3, 0, 4)$ zvolme afinnú súradnicovú sústavu $(A, B - A, C - A)$.
 - a) Aké parametrické vyjadrenie má v tejto súradnicovej sústave priamka BC ?
 - b) Aké súradnice má bod M v $(0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, ak jeho súradnice v $(A, B - A, C - A)$ sú $(5, 3)$.
 - c) Aké súradnice má priesečník roviny ABC s osou x_3 v jednej i druhej súradnicovej sústave.

3. Ukážte, že barycentrická kombinácia barycentrických kombinácií je opäť barycentrická kombinácia.
4. Zistite, či body
 $A_0 = (1, 4, 1, -1)$
 $A_1 = (2, 2, 4, -5)$
 $A_2 = (1, 5, 0, 0)$
 $A_3 = (2, 7, 1, -4)$
 $A_4 = (1, -3, 4, 4)$ tvoria barycentrický súradnicový systém v $(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^4)$. Vyjadrite bod $P = (0, -1, 1, 4)$ ako ich barycentrickú kombináciu. (Výsledok: $P = A_1 - A_0 + 3A_2 - 2A_3$)
5. V trojrozmernom euklidovskom priestore sú dané štyri body A, B, C a D neležiace v jednej rovine. Na úsečkách AB, CD, AC a BD sú dané body K, L, M a N tak, že

$$|AK| : |KB| = |CL| : |LD| \text{ a } |AM| : |MC| = |BN| : |ND|$$

- a) Dokážte, že úsecky KL a MN sa pretínajú práve v jednom bode.
 b) V akom pomere delí priesečník úsečiek KL a MN tieto úsečky?
6. Na priamkach určených stranami AB, BC a AC trojuholníka ABC sú dané body $A' = B + a(C - B), B' = C + b(A - C), C' = A + c(B - A)$. Dokážte, že body A', B', C' ležia na jednej priamke práve vtedy keď $ab + bc + ac - a - b - c + 1 = 0$.
7. Nech $ABCDEF$ je pravidelný šesťuholník v \mathbb{R}^2 . Tvoria A, B, C barycentrickú súradnicovú sústavu? Vyjadrite v nej ostatné body šesťuholníka.