

## Podobnosť matíc

Matice  $A$  a  $B$  sú *podobné*  $\Leftrightarrow$  existuje regulárna matica  $P$  taká, že  $PAP^{-1} = B$ . Táto podmienka je ekvivalentná s tým, že  $A$  aj  $B$  predstavujú maticu toho istého zobrazenia v dvoch rôznych bázach. (Konkrétne, ak  $A$  je matica nejakého zobrazenia pri štandardnej báze, tak  $B = PAP^{-1}$  je matica toho istého zobrazenia pri báze určenej riadkami matice  $P$ .)

Ak  $c\vec{v} = \vec{v}A$ , kde  $\vec{v} \neq \vec{0}$ , tak  $\vec{v}$  je *vlastný vektor* matice  $A$  a  $c$  je *vlastná hodnota* (*vlastné číslo*) matice  $A$ .

Vlastné hodnoty sú presne korene *charakteristického polynómu*  $\chi_A(t) = \det(tI - A)$  matice  $A$ .

Podobné matice majú rovnaký charakteristický polynóm (a teda aj rovnakú stopu, determinant, vlastné čísla).

Matica typu  $n \times n$  je podobná diagonálnej matici práve vtedy, keď jej vlastné vektory tvoria bázu priestoru  $F^n$ . Matice  $P$  a  $D$  také, že  $PAP^{-1} = D$ , kde  $P$  je regulárna a  $D$  je diagonálna, dostaneme tak, že  $D$  má na diagonále vlastné čísla a  $P$  má ako riadky (v rovnakom poradí) vlastné vektory.

*Jordanov normálny tvar.* Každá matica je podobná s blokovo-diagonálnou maticou pozostávajúcou z blokov tvaru

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \lambda & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

1. Vypočítajte charakteristický polynóm a vlastné hodnoty daných matíc. Zistite, či dané matice sú podobné:

a)  $A = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$  a  $B = \begin{pmatrix} 10 & -12 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}$ ;

b) [P, 1067]  $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 9 & -1 \end{pmatrix}$  a  $B = \begin{pmatrix} 38 & -81 \\ 16 & -34 \end{pmatrix}$

2. [P, 1064] Zistite, či matice  $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 2 & 6 & -10 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$  a  $B = \begin{pmatrix} 6 & 20 & -34 \\ 6 & 32 & -51 \\ 4 & 20 & -32 \end{pmatrix}$  sú podobné.

3. Nájdite diagonálnu maticu podobnú s danou maticou:

a)  $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$  nad poľom  $\mathbb{Q}$ ;

b)  $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

a) Vlastné čísla sú:  $-5, 1$ . b) Vlastné čísla sú  $\pm\sqrt{2}$ .

4. Nájdite vlastné hodnoty a vlastné vektory nad poľom  $\mathbb{C}$ .

a)  $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ , b)  $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ , c)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ , d)  $\begin{pmatrix} -1 & 2i \\ -2i & 2 \end{pmatrix}$ , e)  $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

Vlastné čísla sú: a)  $-2, 7$ ; b)  $3 \pm 2i$ ; c)  $-3, 2$ ; d)  $-2, 3$ ; e)  $2, 2 \pm \sqrt{2}$

## Literatúra

[P] I. V. Proskurjakov. *Sbornik zadač po lineinoi algebre*. Binom, Moskva, 9 izd. edition, 2005.