Jordanov tvar

Jordanov normálny tvar. Každá matica nad $\mathbb{C}$ je podobná s blokovo-diagonálnou maticou pozostávajúcou z blokov tvaru

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \lambda & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Počet lineárne nezávislých vlastných vektorov k λ určuje počet blokov, ktoré prislúchajú k λ.
Veľkosti blokov by sme mohli nájsť tak, že hľadáme *zovšeobecnené vlastné vektory,* t.j. vektory také, že $\vec{x}(A-\lambda I)^k = \vec{0}$.
Môžeme ich zistiť aj pomocou hodnosti mocnín matice $(A-\lambda I)$: Počet blokov veľkosti aspoň k je $h((A-\lambda I)^k) - h((A-\lambda I)^{k-1})$.

Pretože matice A a jej Jordanov tvar J sú podobné, budú mať rovnaký minimálny polynóm aj charakteristický polynóm, hodnosť, stopu a determinant.

Ak nie je zadané inak, vo všetkých úlohách pracujeme s maticami na $\mathbb{C}$.

1. [K, Exercise 4101] Nájdite Jordanov tvar danej matice:

a) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} -2 & 8 & 6 \\ -4 & 10 & 6 \\ 4 & -8 & -4 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -6 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 8 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -7 \\ 9 & -3 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$ g) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Riešenia: a) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ d) $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

e) $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ f) $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

2. Nájdite Jordanov tvar, charakteristický polynóm a minimálny polynóm danej matice:

a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

3. [P, 1090–1093] Nájdite Jordanov tvar, charakteristický polynóm a minimálny polynóm danej matice:

a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 & 6 & -15 \\ 1 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & -6 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 9 & -6 & -2 \\ 18 & -12 & -3 \\ 18 & -9 & -6 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 4 & 6 & -15 \\ 1 & 3 & -5 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$

Riešenia: a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

4. Ak viete, že matica A má Jordanov tvar J, dá sa na základe toho odpovedať na zadané otázky?

   a) $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Čomu sa rovná charakteristický polynóm $\chi_A(x)$ a minimálny polynóm $m_A(x)$ matice A?

   b) $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; Čomu sa rovná $h(A-I)$, $h((A-I)^2)$, $h((A-I)^3)$, $h((A-I)^4)$?

   c) $J = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; Je matica A regulárna? Viete nájsť vyjadrenie matice A^{-1} v tvare $p(A)$, kde p je nejaký polynóm? Vedeli by ste nájsť také vyjadrenie, kde polynóm p je najnižšieho možného stupňa?

   d) $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$; Je matica A podobná s maticou $B = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 & -1 \\ 5 & -3 & 4 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$?

5. Ak má matica uvedené vlastnosti dá sa z nich už jednoznačne určiť Jordanov tvar matice A? Ak je viacero možností pre Jordanov tvar, nájdite všetky.
   a) Matica A je rozmerov 4×4 a jej minimálny polynóm je $m_A(x) = (x-2)^2(x-1)$.
   b) $\chi_A(x) = x^4 - 2x^2 + 1$ a $m_A(x) = x^3 + x^2 - x - 1$.
   c) Matica A rozmerov 4×4 je singulárna a $h(A - 2I) = 3$.
   d) Pre maticu A rozmerov 4×4 platí $h(A - 2I) = 2$ a $h((A - 2I)^2) = 0$, pričom 2 je jediné vlastné číslo matice A.

Podobnosť matíc

1. Dokážte, že ak A a B sú podobné, tak sú podobné aj matice $A - cI$ a $B - cI$ (pre ľubovoľné $c \in F$).
2. [P, 1051] Nech φ je ľubovoľná permutácia množiny $\{1, 2, \dots, n\}$. Dokážte, že matice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \hdotsfor{4} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad \text{a} \qquad B = \begin{pmatrix} a_{\varphi(1)\varphi\varphi} & a_{\varphi(1)\varphi(2)} & \dots & a_{\varphi(1)\varphi(n)} \\ a_{\varphi(2)\varphi(1)} & a_{\varphi(2)\varphi(2)} & \dots & a_{\varphi(2)\varphi(n)} \\ \hdotsfor{4} \\ a_{\varphi(n)\varphi(1)} & a_{\varphi(n)\varphi(2)} & \dots & a_{\varphi(n)\varphi(n)} \end{pmatrix}$$

   sú podobné.

Literatúra

[K] A. I. Kostrikin. *Exercises in Algebra: A collection of Exercises in Algebra, Linear Algebra and Geometry.* OPA, Amsterdam, 1996.

[P] I. V. Proskurjakov. *Sbornik zadač po lineinoi algebre.* Binom, Moskva, 9 izd. edition, 2005.