Krivky druhého rádu

1. [S, 540] Aký typ krivky predstavuje daná rovnica? Nájdite afinnú transformáciu, ktorou túto krivku môžeme previesť na kanonický tvar. Aký má táto krivka stred, osi?
a) $5x_1^2 + 4x_1x_2 + 8x_2^2 - 32x_1 - 56x_2 + 80 = 0$;
b) $5x_1^2 + 8x_1x_2 + 5x_2^2 - 18x_1 - 18x_2 + 9 = 0$
c) $5x_1^2 + 6x_1x_2 + 5x_2^2 - 16x_1 - 16x_2 - 16 = 0$
d) $12x_1x_2 + 5x_2^2 - 12x_1 - 22x_2 - 19 = 0$
e) $7x_1^2 + 16x_1x_2 - 23x_2^2 - 14x_1 - 16x_2 - 218 = 0$
f) $7x_1^2 - 24x_1x_2 - 38x_1 + 24x_2 + 175 = 0$
g) $9x_1^2 + 24x_1x_2 + 16x_2^2 - 40x_1 - 30x_2 = 0$
h) $x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 8x_1 + 4 = 0$
i) $4x_1^2 - 4x_1x_2 + x_2^2 - 2x_1 - 14x_2 + 7 = 0$

Kvadratické formy

1. Nájdite maximálnu a minimálnu hodnotu danej funkcie na množine M. (Prípadne sa môžete pokúsiť nájsť aj v akom bode sa maximum a minimum nadobúda.)
a) $f(x, y) = x^2 + 2xy + 3y^2$; $M = \mathbb{R}^2$
b) $f(x, y) = xy$, $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1\}$;
c) $f(x, y) = x^2 + 4y^2$, $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1\}$;
d) $f(x, y) = x^2 + 2xy + 4y^2$, $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1\}$;
e) $f(x, y) = 2x^2 + 2xy + 2y^2$, $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1\}$;
f) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_1$, $M = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4; x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1\}$ (Hint: Táto úloha sa dá riešiť pomocou kvadratických foriem. Možno však kratšie riešenie nájdete použitím Cauchy-Schwarzovej nerovnosti alebo niektorých iných nerovností, ktoré už poznáte.)
g) $f(x, y) = x^2 + y^2$, $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + 4y^2 = 1\}$;
h) $f(x, y) = x^2 + y^2$, $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 3x^2 - 4xy + 3y^2 = 1\}$;

Rôzne

1. Nech pre matice A, B existuje regulárna matica P taká, že $PAP^{-1} = D_1$ aj $PAP^{-1} = D_2$ sú diagonálne matice. Ukážte, že $AB = BA$, t.j. matice A, B komutujú.
2. Zistite, či pre dané matice A, B existuje regulárna matica P taká, že PAP^{-1} aj PBP^{-1} sú diagonálne:
a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$
b) $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$
c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

Literatúra

[S] Yu. M. Smirnov. *Sbornik zadach po analiticheskoi geometrii i linejnoj algebre.* Golos, Moskva, 2005.