

#### D.Ú.-sada 4

1. Dokážte, že ak  $2^n + 1$  je prvočíslo, tak  $n$  je mocnina 2.
2. Nájdite 5 po sebe idúcich prirodzených čísel takých, že prvé z nich je párne, ďalšie je deliteľné 3, tretie je deliteľné 5, štvrté je deliteľné 7 a piate je deliteľné 11.
3. Dokážte, že pre ľubovoľné celé čísla  $p, q$  je  $p^5q - pq^5$  deliteľné 5.
4. Zistite, či sú riešiteľné kongruencie a)  $x^2 \equiv 3 \pmod{31}$ , b)  $x^2 \equiv 5 \pmod{31}$ , c)  $x^2 \equiv 631 \pmod{1093}$ .
5. Dokážte, že 5 je kvadratický zvyšok pre prvočísla tvaru  $10k \pm 1$  a kvadratický nezvyšok pre prvočísla tvaru  $10k \pm 3$ .