D.Ú.-sada 5

1. Dokážte, že pre prirodzené čísla m, n také, že $(m,n) = 1$ platí $(M_m, M_n) = 1$, kde $M_k = 2^k - 1$ je k-te Mersennove číslo. Ako z toho vyplýva nekonečnosť množiny všetkých prvočísel?
2. Nájdite všetky prirodzené čísla n, pre ktoré $2^n - 1$ je deliteľné 7.
3. Nech F_n označuje n-té Fibonacciho číslo (t.j. F_n je určené rekurentným predpisom $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ a počiatočnými hodnotami $F_0 = 0$, $F_1 = 1$.) Dokážte, že pre každé $m \in \mathbb{N}$ existuje nekonečne veľa čísel n takých, že $F_n \equiv 0 \pmod{m}$; inak povedané $m \mid F_n$.
4. Zistite, či sú riešiteľné kongruencie a) $x^2 \equiv 17 \pmod{29}$, b) $3x^2 \equiv 12 \pmod{23}$, c) $2x^2 \equiv 27 \pmod{41}$.
5. Dokážte, že ak p je prvočíslo a $p = 4k+1$, tak $\sum\limits_{a=1}^{p-1} a \left(\frac{a}{p}\right) = 0$.