D.Ú.–sada 10

1. Dokážte, že pre prirodzené čísla m, n také, že $(m,n) = 1$ platí $(M_m, M_n) = 1$, kde $M_k = 2^k - 1$ je k-te Mersennove číslo. Ako z toho vyplýva nekonečnosť množiny všetkých prvočísel?
2. Riešte sústavu kongruencií

$$\begin{aligned} 3x &\equiv 7 \pmod{5} \\ x &\equiv 1 \pmod{4} \\ 5x &\equiv 2 \pmod{11} \end{aligned}$$

3. Dokážte, že $\sum_{t|n} d(t)^3 = (\sum_{t|n} d(t))^2$.
4. Zistite, či sú riešiteľné kongruencie a) $x^2 \equiv 17 \pmod{29}$, b) $3x^2 \equiv 12 \pmod{23}$, c) $2x^2 \equiv 27 \pmod{41}$.
5. Dokážte, že ak p je prvočíslo a $p = 4k+1$, tak $\sum\limits_{a=1}^{p-1} a \left(\frac{a}{p}\right) = 0$.