

## D.Ú.-sada 16

1. Dokážte, že pre každé  $n \in \mathbb{N}$  platí  $9 \mid (n-1)^3 + n^3 + (n+1)^3$ .
2. Dokážte, že  $\sum_{d|n} \frac{1}{d} = \frac{\sigma(n)}{n}$  platí pre všetky  $n \in \mathbb{N}$ . Ak  $n$  je dokonalé, tak  $\sum_{d|n} \frac{1}{d} = 2$ .
3. Nech  $F_n$  označuje  $n$ -té Fibonacciho číslo (t.j.  $F_n$  je určené rekurentným predpisom  $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$  a počiatočnými hodnotami  $F_0 = 0, F_1 = 1$ .) Dokážte, že pre každé  $m \in \mathbb{N}$  existuje nekonečne veľa čísel  $n$  takých, že  $F_n \equiv 0 \pmod{m}$ ; inak povedané  $m \mid F_n$ .
4. Zistite, či sú riešiteľné kongruencie a)  $x^2 \equiv 3 \pmod{31}$ , b)  $x^2 \equiv 5 \pmod{31}$ , c)  $x^2 \equiv 631 \pmod{1093}$ .
5. Dokážte, že 5 je kvadratický zvyšok pre prvočísla tvaru  $10k \pm 1$  a kvadratický nezvyšok pre prvočísla tvaru  $10k \pm 3$ .