

### D.Ú.–sada 17

1. Dokážte, že ak  $p$  aj  $p^2 + 2$  sú prvočísla, tak aj  $p^3 + 2$  je prvočíslo. Koľko takých trojíc existuje?
2. Nájdite všetky prirodzené čísla  $n$ , pre ktoré  $2^n - 1$  je deliteľné 7.
3. Dokážte, že  $\frac{n}{\varphi(n)} = \sum_{d|n} \frac{\mu^2(d)}{\varphi(d)}$ .
4. Zistite, či sú riešiteľné kongruencie a)  $x^2 \equiv 3 \pmod{31}$ , b)  $x^2 \equiv 5 \pmod{31}$ , c)  $x^2 \equiv 631 \pmod{1093}$ .
5. Dokážte, že ak  $p$  je prvočíslo a  $p = 4k + 1$ , tak  $\sum_{a=1}^{p-1} a \left(\frac{a}{p}\right) = 0$ .