

Obsah

1 Úvod	3
1.1 Sylaby a literatúra	3
1.2 Základné označenia	3
2 Množiny a zobrazenia	4
2.1 Dôkazy	4
2.1.1 Základné typy dôkazov	4
2.1.2 Matematická indukcia	4
2.1.3 Drobné rady ako dokazovať	4
2.1.4 Výroky, logické spojky, tautológie	4
2.1.5 Negácia výrokov s kvantifikátormi	4
2.2 Množiny a zobrazenia	4
2.2.1 Množiny	4
2.2.2 Zobrazenia	5
2.2.3 Vzor a obraz množiny*	6
2.3 Permutácie	6
3 Grupy a polia	7
3.1 Binárne operácie	7
3.1.1 Zovšeobecnený asociatívny zákon*	8
3.2 Grupy	8
3.3 Polia	8
4 Vektorové priestory	11
4.1 Vektorový priestor	11
4.2 Podpriestory	11
4.3 Lineárna kombinácia, lineárna nezávislosť	12
4.3.1 Lineárna kombinácia a lineárny obal	12
4.3.2 Lineárna nezávislosť	13
4.4 Báza a dimenzia	13
4.5 Lineárne a direktné súčty podpriestorov	14
5 Lineárne zobrazenia a matice	15
5.1 Matice	15
5.2 Riadková ekvivalencia a hodnosť matice	16
5.3 Lineárne zobrazenia	17
5.4 Súčin matíc	17
5.5 Inverzná matica	18

5.6	Elementárne riadkové operácie a súčin matíc	19
5.7	Sústavy lineárnych rovníc	19
5.7.1	Homogénne sústavy lineárnych rovníc	20
5.7.2	Gaussova eliminačná metóda	20
5.7.3	Frobeniova veta	20
5.8	Jadro a obraz lineárneho zobrazenia	20
5.9	Hodnosť transponovanej matice	21
5.10	Násobenie blokových matíc*	21
6	Determinanty	22
6.1	Motivácia	22
6.2	Definícia determinantu	22
6.3	Výpočet determinantov	22
6.3.1	Laplaceov rozvoj	22
6.3.2	Výpočet pomocou riadkových a stĺpcových operácií	22
6.4	Determinant súčinu matíc	23
6.5	Využitie determinantov	23
6.5.1	Výpočet inverznej matice	23
6.5.2	Cramerovo pravidlo	23
A	Delenie so zvyškom	24
B	Komplexné čísla	25
B.1	Definícia komplexných čísel, algebraický tvar komplexného čísla	25
B.2	Geometrická interpretácia komplexných čísel, goniometrický tvar, Moivrova veta	25
B.3	Riešenie rovníc v komplexných číslach	26
B.3.1	Kvadratické rovnice s reálnymi koeficientmi	26
B.3.2	Binomické rovnice	26
B.4	Zopár ďalších vecí súvisiacich s komplexnými číslami	26

Kapitola 1

Úvod

1.1 Sylaby a literatúra

1.2 Základné označenia

Kapitola 2

Množiny a zobrazenia

2.1 Dôkazy

2.1.1 Základné typy dôkazov

Tvrdenie 2.1.1. *Nech n je celé číslo. Potom zvyšok čísla n^2 po delení 4 je 0 alebo 1. Pritom ak n je párne, tak n^2 je deliteľné 4 a ak n je nepárne tak n^2 má zvyšok 1.*

Tvrdenie 2.1.2. *Ak pre celé čísla a, b, c platí rovnosť $a^2 + b^2 = c^2$, tak aspoň jedno z čísel a, b je párne.*

Tvrdenie 2.1.3. *Nech n je prirodzené číslo. Ak n^2 je deliteľné štyrmi, tak n je párne.*

2.1.2 Matematická indukcia

2.1.3 Drobné rady ako dokazovať

2.1.4 Výroky, logické spojky, tautológie

Definícia 2.1.4. *Negáciou výroku P rozumieme výrok „neplatí P “. Označujeme ju $\neg P$.*

Pre dva výroky P a Q nazývame ich konjunkciou výrok „ P a Q “, označujeme $P \wedge Q$.

Disjunkcia je výrok „ P alebo Q “, označujeme $P \vee Q$.

Pod implikáciou rozumieme výrok „ak platí P , tak platí Q “, označujeme $P \Rightarrow Q$.

Ekvivalencia výrokov P a Q je výrok „ P platí práve vtedy, keď platí Q “, označujeme $P \Leftrightarrow Q$.

2.1.5 Negácia výrokov s kvantifikátormi

2.2 Množiny a zobrazenia

2.2.1 Množiny

Definícia 2.2.1. *Vzťah byť prvok množiny zapisujeme ako $x \in A$, čítame „ x patrí A “.*

Hovoríme, že množiny A a B sa rovnajú (označujeme $A = B$), ak platí

$$(x \in A) \quad \Leftrightarrow \quad (x \in B)$$

pre ľubovoľný prvok x .

Množiny, ktorá nemá nijaké prvky nazývame prázdna množina a označujeme \emptyset .

Definícia 2.2.2. Hovoríme, že A je *podmnožinou* B , ak každý prvok množiny A patrí aj do B , označujeme $A \subseteq B$. Inak povedané, $A \subseteq B$ ak pre každé x platí

$$(x \in A) \quad \Rightarrow \quad (x \in B).$$

Vzťah množín A a B , pre ktoré platí $A \subseteq B$ sa tiež zvykne nazývať *inklúzia*.

Definícia 2.2.3. *Zjednotenie* dvoch množín A a B je množina

$$A \cup B = \{x; x \in A \vee x \in B\}.$$

Prienik dvoch množín A a B je množina

$$A \cap B = \{x \in A; x \in B\}.$$

Rozdiel dvoch množín A a B je množina

$$A \setminus B = \{x \in A; x \notin B\}$$

Definícia 2.2.4. Ak A, B sú množiny, tak ich *karteziánsky súčin* je množina všetkých usporiadaných dvojíc (a, b) takých, že $a \in A$ a $b \in B$. Označujeme ho

$$A \times B = \{(a, b); a \in A, b \in B\}.$$

2.2.2 Zobrazenia

Definícia 2.2.5. *Zobrazenie* $f: X \rightarrow Y$ z množiny X do množiny Y je podmnožina f množiny $X \times Y$ taká, že ku každému $x \in X$ existuje práve jedno $y \in Y$ s vlastnosťou $(x, y) \in f$.

Množinu X budeme tiež nazývať *definičný obor* zobrazenia f a množina Y je *obor hodnôt* zobrazenia f .

Namiesto zápisu $(x, y) \in f$ budeme používať zápis $y = f(x)$.

Definícia 2.2.6. Hovoríme, že dve zobrazenia $f: X \rightarrow Y$ a $g: Z \rightarrow W$ sa *rovnajú*, ak $X = Z$, $Y = W$ a $f(x) = g(x)$ pre každé $x \in X$. (Inými slovami, ak sa rovnajú ich definičné obory, obory hodnôt a obe zobrazenia nadobúdajú v každom bode rovnakú hodnotu.) Rovnosť zobrazení označujeme $f = g$.

Definícia 2.2.7 (Skladanie zobrazení). Ak $f: X \rightarrow Y$, $g: Y \rightarrow Z$ sú zobrazenia, tak *zložením zobrazení* f a g nazývame zobrazenie $g \circ f: X \rightarrow Z$ také, že pre každé $x \in X$ platí

$$g \circ f(x) = g(f(x)).$$

Tvrdenie 2.2.8 (Asociatívnosť skladania zobrazení). *Nech* $f: X \rightarrow Y$, $g: Y \rightarrow Z$, $h: Z \rightarrow W$ sú zobrazenia, potom

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f).$$

Definícia 2.2.9. Nech $f: X \rightarrow Y$ je zobrazenie. Hovoríme, že f je *injektívne (prosté) zobrazenie* (alebo tiež *injekcia*), ak pre všetky $x, y \in X$ také, že $x \neq y$ platí $f(x) \neq f(y)$.

Hovoríme, že f je *surjekcia* (*surjektívne zobrazenie, zobrazenie na*), ak pre každé $y \in Y$ existuje také, $x \in X$, že $f(x) = y$.

Hovoríme, že f je *bijekcia* (*bijektívne zobrazenie*), ak f je súčasne injekcia aj surjekcia.

Tvrdenie 2.2.10. *Zloženie dvoch injekcií je injekcia, zloženie dvoch surjekcií je surjekcia, zloženie dvoch bijekcií je bijekcia.*

Definícia 2.2.11. Zobrazenie $id_X: X \rightarrow X$ také, že $id_X(x) = x$ pre každé $x \in X$ sa nazýva *identické zobrazenie (identita)*.

Definícia 2.2.12. Nech $f: X \rightarrow Y$ a $g: Y \rightarrow X$ sú zobrazenia. Ak platí

$$\begin{aligned}g \circ f &= id_X \\ f \circ g &= id_Y\end{aligned}$$

tak hovoríme, že zobrazenie g je *inverzné zobrazenie k f* . Inverzné zobrazenie k zobrazeniu f označujeme f^{-1} .

Tvrdenie 2.2.13. *Inverzné zobrazenie k f existuje práve vtedy, keď f je bijekcia.*

Tvrdenie 2.2.14. *Nech $f: X \rightarrow Y$ a $g: Y \rightarrow Z$ sú bijekcie. Potom*

$$\begin{aligned}(f^{-1})^{-1} &= f \\ (g \circ f)^{-1} &= f^{-1} \circ g^{-1}\end{aligned}$$

Dôsledok 2.2.15. *Ak f je bijekcia, tak aj f^{-1} je bijekcia.*

2.2.3 Vzor a obraz množiny*

Definícia 2.2.16. Nech $f: X \rightarrow Y$ je zobrazenie, $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$. Množinu

$$f[A] = \{f(a); a \in A\}$$

nazývame *obrazom* množiny A v zobrazení f . Množinu

$$f^{-1}(B) = \{x \in X; f(x) \in B\}$$

nazývame *vzorom* množiny B v zobrazení f .

2.3 Permutácie

Definícia 2.3.1. Ak M je konečná množina, tak bijekciu $\varphi: M \rightarrow M$ budeme nazývať *permutáciou množiny M* .

Kapitola 3

Grupy a polia

3.1 Binárne operácie

Definícia 3.1.1. Binárna operácia $*$ na množine A je zobrazenie z množiny $A \times A$ do A .

Namiesto $*(a, b)$ budeme používať označenie $a * b$, tento zápis budeme niekedy skracovať ako ab .

Definícia 3.1.2. Nech $*$ je binárna operácia na množine M . Hovoríme, že $e \in M$ je *ľavý neutrálny prvok* operácie $*$, ak pre všetky $m \in M$ platí

$$e * m = m.$$

Podobne, e je *pravý neutrálny prvok*, ak

$$m * e = m$$

pre každé $m \in M$.

Ak e je súčasne ľavý aj pravý neutrálny prvok operácie $*$, hovoríme, že e je *neutrálny prvok*.

Tvrdenie 3.1.3. Nech $*$ je binárna operácia na množine M . Ak e_1 je jej ľavý neutrálny a e_2 je jej pravý neutrálny prvok, tak $e_1 = e_2$.

Špeciálne, ak má binárna operácia $$ na množine M neutrálny prvok, tak tento neutrálny prvok je jediný.*

Definícia 3.1.4. Binárna operácia $*$ na množine M je *komutatívna*, ak pre všetky $x, y \in M$ platí

$$x * y = y * x.$$

Definícia 3.1.5. Binárna operácia $*$ na množine M je *asociatívna*, ak pre všetky $x, y, z \in M$ platí

$$(x * y) * z = x * (y * z).$$

Definícia 3.1.6. Nech $*$ je binárna operácia na množine M . Nech $a \in M$ a nech e je neutrálny prvok operácie $*$. Prvok $b \in M$ je *inverzný* k prvku a , ak platí

$$a * b = b * a = e.$$

V prípade, že platí $a * b = e$, b nazývame *pravý inverzný prvok* k a . Ak $b * a = e$, tak b je *ľavý inverzný prvok* k a .

Tvrdenie 3.1.7. Nech $*$ je asociatívna operácia na množine M a $*$ má neutrálny prvok e . Ak existuje inverzný prvok k a , tak je jednoznačne určený.

3.1.1 Zovšeobecnený asociatívny zákon*

Tvrdenie 3.1.8 (Zovšeobecnený asociatívny zákon). *Nech \cdot je asociatívna binárna operácia na množine A . Potom súčin $a_1 * a_2 * \dots * a_n$ nezávisí od spôsobu uzátvorkovania.*

3.2 Grupy

Definícia 3.2.1. Dvojica $(G, *)$, kde G je množina a $*$ je binárna operácia na G , sa nazýva *grupa*, ak

- (i) operácia $*$ je asociatívna,
- (ii) operácia $*$ má neutrálny prvok, (neutrálny prvok budeme spravidla označovať e)
- (iii) ku každému prvku $g \in G$ existuje inverzný prvok vzhľadom na operáciu $*$. (Tento inverzný prvok budeme označovať g^{-1} .)

Definícia 3.2.2. Grupa $(G, *)$ sa nazýva *komutatívna*, ak operácia $*$ na G je komutatívna. (Tiež sa používa termín *abelovská grupa*.)

Veta 3.2.3 (Zákony o krátení). *Ak $(G, *)$ je grupa, tak pre ľubovoľné $a, b, c \in G$ platí*

$$\begin{aligned} a * b = a * c &\Rightarrow b = c \\ b * a = c * a &\Rightarrow b = c \end{aligned}$$

Veta 3.2.4. *Nech $(G, *)$ je grupa. Potom pre ľubovoľné $a, b \in G$ platí*

$$\begin{aligned} (a^{-1})^{-1} &= a \\ (a * b)^{-1} &= b^{-1} * a^{-1} \end{aligned}$$

3.3 Polia

Definícia 3.3.1. Nech F je množina, $+$ a \cdot sú binárne operácie na F . Hovoríme, že trojica $(F, +, \cdot)$ je *pole*, ak

- (i) $(F, +)$ je komutatívna grupa, jej neutrálny prvok budeme označovať 0 ;
- (ii) $(F \setminus \{0\}, \cdot)$ je komutatívna grupa, jej neutrálny prvok budeme označovať 1 ;
- (iii) pre ľubovoľné $a, b, c \in F$ platí

$$\begin{aligned} a(b + c) &= ab + ac, \\ (a + b)c &= ac + bc. \end{aligned}$$

(Túto vlastnosť nazývame *distributívnosť*.)

Pre inverzný prvok v grupe $(F, +)$ budeme používať označenie $-a$, t.j. pre túto grupu používame aditívny zápis. Prvok $-a$ nazývame *opačný prvok* k prvku a .

Pre grupu $(F \setminus \{0\}, \cdot)$ budeme používať multiplikatívny zápis, teda inverzný prvok k prvku $a \neq 0$ poľa F vzhľadom na operáciu \cdot budeme značiť a^{-1} . Ak použijeme termín *inverzný prvok* v súvislosti s polom a nešpecifikujeme binárnu operáciu, myslí sa tým práve prvok a^{-1} .

Namiesto $b + (-c)$ budeme používať stručnejší zápis $b - c$.

Definícia 3.3.2. Pole je množina F , na ktorej sú definované 2 binárne operácie $+$ a \cdot spĺňajúce:

- (i) pre všetky $a, b, c \in F$ platí $a + (b + c) = (a + b) + c$,
- (ii) pre všetky $a, b \in F$ platí $a + b = b + a$,
- (iii) existuje prvok $0 \in F$ taký, že pre každé $a \in F$ sa $a + 0 = a$,
- (iv) ku každému $a \in F$ existuje $b \in F$ tak, že $a + b = 0$,
- (v) pre všetky $a, b, c \in F$ platí $a.(b.c) = (a.b).c$,
- (vi) pre všetky $a, b \in F$ platí $a.b = b.a$,
- (vii) existuje prvok $1 \in F$ taký, že $1 \neq 0$ a pre každé $a \in F$ sa $a.1 = a$,
- (viii) ku každému $a \in F$, $a \neq 0$ existuje $b \in F$ tak, že $a.b = 1$,
- (ix) pre všetky $a, b, c \in F$ sa $a.(b + c) = a.b + a.c$.

Tvrdenie 3.3.3. *Nech $(F, +, \cdot)$ je pole. Potom pre $a, b, c \in F$ platí*

- (i) $a.0 = 0$, $0.a = 0$,
- (ii) $a.b = b.a$,
- (iii) $1.a = a.1 = a$,
- (iv) $(-a).b = -a.b$,
- (v) $(-a).(-b) = a.b$,
- (vi) $a.b = 0 \Rightarrow a = 0 \vee b = 0$,
- (vii) $a.b = a.c \wedge a \neq 0 \Rightarrow b = c$,
- (viii) $a.a = a \Rightarrow a = 0 \vee a = 1$.

Definícia 3.3.4. Nech $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Množinu \mathbb{Z}_n definujeme ako $\mathbb{Z}_n := \{0, 1, \dots, n-1\}$. (Teda množina \mathbb{Z}_n obsahuje všetky možné zvyšky po delení číslom n .)

Na množine \mathbb{Z}_n zavedieme operácie \oplus a \odot predpisom

$$\begin{aligned} a \oplus b &= (a + b) \bmod n, \\ a \odot b &= (ab) \bmod n, \end{aligned}$$

kde operácia \bmod označuje zvyšok po delení číslom n (pozri dodatok A).

Definícia 3.3.5. Číslo $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, nazývame *zloženým číslom*, ak $n = m.k$ pre nejaké $m, k \in \mathbb{N}$ také, že $1 < m, k < n$.

Ak $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, nie je zložené, tak ho nazývame *prvočíslo*.

Číslo 1 nepovažujeme ani za prvočíslo ani za zložené číslo.

Veta 3.3.6. *Ak p je prvočíslo, tak $(\mathbb{Z}_p, \oplus, \odot)$ je pole.*

Definícia 3.3.7. Ak n je celé číslo a a, b sú prvky poľa F , tak definujeme $n \times a$ takto:

$$0 \times a = 0,$$

$$(n + 1) \times a = n \times a + a \text{ (zatiaľ sme to indukciou definovali pre prirodzené čísla),}$$

Ak $n > 0$ tak definujeme $(-n) \times a = -(n \times a)$ (tým sme rozšírili definíciu aj na záporné čísla).

Podobne definujeme pre $a \neq 0$:

$$a^0 = 1,$$

$$a^{n+1} = a^n \cdot a,$$

$$a^{-n} = (a^n)^{-1} \text{ (} n > 0 \text{)}.$$

Kapitola 4

Vektorové priestory

4.1 Vektorový priestor

Definícia 4.1.1. Nech F je pole a $V \neq \emptyset$ je množina. Nech $+$ je binárna operácia na V a každej dvojici $c \in F$, $\vec{\alpha} \in V$ je priradený prvok $c.\vec{\alpha} \in V$, pričom platí pre ľubovoľné $c, d \in F$ a $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \in V$:

(i) $(V, +)$ je komutatívna grupa,

(ii) $c.(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) = c.\vec{\alpha} + c.\vec{\beta}$,

(iii) $(c + d).\vec{\alpha} = c.\vec{\alpha} + d.\vec{\alpha}$,

(iv) $(c.d).\vec{\alpha} = c.(d.\vec{\alpha})$,

(v) $1.\vec{\alpha} = \vec{\alpha}$.

Potom hovoríme, že V je *vektorový priestor* nad polom F .

Veta 4.1.2. Nech V je vektorový priestor nad polom F , $c \in F$ a $\vec{\alpha} \in V$.

(a) $0.\vec{\alpha} = \vec{0}$,

(b) $c.\vec{0} = \vec{0}$,

(c) $c.\vec{\alpha} = \vec{0}$ práve vtedy, keď $c = 0$ alebo $\vec{\alpha} = \vec{0}$,

(d) $(-c).\vec{\alpha} = -c.\vec{\alpha}$.

4.2 Podpriestory

Definícia 4.2.1. Ak V je vektorový priestor nad polom F , $S \neq \emptyset$ a $S \subseteq V$, tak S nazveme *podpriestorom* (alebo tiež *vektorovým podpriestorom*) priestoru V , ak

(i) pre ľubovoľné $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \in S$ platí $\vec{\alpha} + \vec{\beta} \in S$,

(ii) pre ľubovoľné $\vec{\alpha} \in S$ a $c \in F$ platí $c.\vec{\alpha} \in S$.

Tvrdenie 4.2.2 (Kritérium vektorového podpriestoru). *Nech V je vektorový priestor nad poľom F a $S \subseteq V$, $S \neq \emptyset$. Potom S je podpriestor V práve vtedy, keď pre ľubovoľné $c, d \in F$ a $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \in S$ platí*

$$\vec{\alpha}, \vec{\beta} \in S \quad \Rightarrow \quad c\vec{\alpha} + d\vec{\beta} \in S. \quad (4.1)$$

Veta 4.2.3. *Ak S a T sú podpriestory vektorového priestoru V , tak aj $S \cap T$ je podpriestor V .*

Dôsledok 4.2.4. *Nech $n \in \mathbb{N}$. Ak S_1, S_2, \dots, S_n sú podpriestory priestoru V , tak aj $\bigcap_{i=1}^n S_i$ je podpriestor priestoru V .*

Veta 4.2.5. *Nech $I \neq \emptyset$ je ľubovoľná neprázdna množina a S_i je podpriestor priestoru V pre každé $i \in I$. Potom aj $\bigcap_{i \in I} S_i$ je podpriestor priestoru V .*

4.3 Lineárna kombinácia, lineárna nezávislosť

4.3.1 Lineárna kombinácia a lineárny obal

Definícia 4.3.1. *Nech V je vektorový priestor nad poľom F . Hovoríme, že vektor $\vec{\alpha}$ je lineárnou kombináciou vektorov $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_n$, ak existujú skaláry $c_1, c_2, \dots, c_n \in F$ také, že*

$$\vec{\alpha} = c_1\vec{\alpha}_1 + c_2\vec{\alpha}_2 + \dots + c_n\vec{\alpha}_n.$$

Skaláry c_1, c_2, \dots, c_n nazývame *koeficienty lineárnej kombinácie*.

Tvrdenie 4.3.2. *Nech V je vektorový priestor nad poľom F . Ak $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_n \in V$, tak množina*

$$M = \{c_1\vec{\alpha}_1 + c_2\vec{\alpha}_2 + \dots + c_n\vec{\alpha}_n; c_i \in F \text{ pre } i = 1, 2, \dots, n\}$$

je podpriestor vektorového priestoru V .

Tento podpriestor nazývame lineárny obal vektorov $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_n$ alebo podpriestor generovaný vektormi $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_n$. Označujeme ho

$$M =: [\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_n].$$

Ak platí $[\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_n] = V$, hovoríme, že vektory $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_n$ generujú vektorový priestor V .

Lema 4.3.3. *Ak $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_n \in S$, kde S je podpriestor vektorového priestoru V nad poľom F , aj ich ľubovoľná lineárna kombinácia $c_1\vec{\alpha}_1 + c_2\vec{\alpha}_2 + \dots + c_n\vec{\alpha}_n$ patrí do podpriestoru S .*

Veta 4.3.4. *Ak $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_n \in S$, kde S je podpriestor vektorového priestoru V nad poľom F , tak $[\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_n] \subseteq S$.*

Veta 4.3.5. *Nech $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_n \in V$, $\vec{\beta} \in V$, kde V je vektorový priestor nad poľom F . Potom $\vec{\beta}$ je lineárnou kombináciou vektorov $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_n$ práve vtedy, keď*

$$[\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_n] = [\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_n, \vec{\beta}].$$

4.3.2 Lineárna nezávislosť

Definícia 4.3.6. Nech V je vektorový priestor nad polom F . Vektory $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n$ sú *lineárne závislé*, ak existujú $c_1, \dots, c_n \in F$, ktoré nie sú všetky nulové a platí

$$c_1\vec{\alpha}_1 + \dots + c_n\vec{\alpha}_n = \vec{0}.$$

(Stručne: $\vec{0}$ je nenulovou lineárnou kombináciou vektorov $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n$.)

V opačnom prípade hovoríme, že vektory $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n$ *lineárne nezávislé*.

Veta 4.3.7. Nech V je vektorový priestor nad polom F . Nech n je prirodzené číslo, $n \geq 2$ a $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n \in V$. Vektory $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n$ sú *lineárne závislé práve vtedy*, keď niektorý z nich je lineárnou kombináciou ostatných.

Veta 4.3.8. Nech V je vektorový priestor nad polom F . Nech $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n \in V$ sú vektory také, že $\vec{\alpha}_1 \neq \vec{0}$. Vektory $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n$ sú *lineárne závislé práve vtedy*, keď niektorý z nich je lineárnou kombináciou predchádzajúcich.

Veta 4.3.9. Nech V je vektorový priestor nad polom F . Vektory $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n \in V$ sú *lineárne závislé práve vtedy*, keď niektorý z nich je lineárnou kombináciou predchádzajúcich.

Veta 4.3.10 (Steinitzova veta o výmene). Nech V je vektorový priestor nad polom F . Ak $V = [\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n]$ (vektorový priestor V je generovaný vektormi $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n$) a $\vec{\beta}_1, \dots, \vec{\beta}_s \in V$ sú *lineárne nezávislé vektory*, tak

- (i) $s \leq n$,
- (ii) z vektorov $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n$ sa dá vybrať $n - s$ vektorov, ktoré spolu s vektormi $\vec{\beta}_1, \dots, \vec{\beta}_s$ generujú V .

4.4 Báza a dimenzia

Definícia 4.4.1. Nech V je vektorový priestor. Hovoríme, že V je *konečnorozmerný* ak existuje taká konečná množina vektorov $\{\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n\}$, že platí $[\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n] = V$.

Definícia 4.4.2. Nech V je vektorový priestor nad polom F . Množinu vektorov $\{\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n\}$ nazývame *bázou* priestoru V , ak

- (i) vektory $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n$ sú *lineárne nezávislé*,
- (ii) $V = [\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n]$.

(Stručne: Báza je taká množina lineárne nezávislých vektorov, ktorá generuje celý priestor.)

Veta 4.4.3. *Ľubovoľné dve bázy konečnorozmerného vektorového priestoru V majú rovnaký počet prvkov.*

Veta 4.4.4. Nech V je *konečnorozmerný vektorový priestor*. Ak $\vec{\beta}_1, \dots, \vec{\beta}_s \in V$ sú *lineárne nezávislé*, tak sa dajú doplniť na bázu priestoru V .

Dôsledok 4.4.5. Každý *konečnorozmerný vektorový priestor* $V \neq \{\vec{0}\}$ má bázu.

Definícia 4.4.6. *Dimenziou* konečnorozmerného vektorového priestoru V nazývame počet prvkov ľubovoľnej jeho bázy. (Pre nulový priestor dodefínujeme $d(\{\vec{0}\}) = 0$.) Toto číslo označujeme $d(V)$.

Dôsledok 4.4.7. Ak V je konečnorozmerný vektorový priestor a $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n$ sú lineárne nezávislé vo V , tak $n \leq d(V)$.

Veta 4.4.8. Nech V je konečnorozmerný vektorový priestor a $d(V) = n$. Nasledujúce podmienky sú ekvivalentné:

- (i) $\{\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n\}$ je báza priestoru V ,
- (ii) vektory $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n$ sú lineárne nezávislé,
- (iii) $V = [\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n]$.

Veta 4.4.9. Nech V je vektorový priestor. Vektory $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n$ tvoria bázu priestoru V právetedy, keď každý vektor $\vec{\beta}$ sa dá jednoznačne vyjadriť ako

$$\vec{\beta} = c_1\vec{\alpha}_1 + \dots + c_n\vec{\alpha}_n.$$

Veta 4.4.10. Lubovoľný podpriestor S konečnorozmerného priestoru V je konečnorozmerný. Navyše, $d(S) \leq d(V)$.

Tvrdenie 4.4.11. Ak S je podpriestor konečnorozmerného vektorového priestoru V a $d(S) = d(V)$, tak $S = V$.

4.5 Lineárne a direktné súčty podpriestorov

Veta 4.5.1. Nech S, T sú vektorové podpriestory vektorového priestoru V nad polom F . Potom

$$S + T = \{\vec{\alpha} + \vec{\beta}; \vec{\alpha} \in S, \vec{\beta} \in T\}$$

je podpriestorom vektorového priestoru V .

Definícia 4.5.2. Ak S, T sú podpriestory vektorového podpriestoru V , tak vektorový podpriestor $S + T$ sa nazýva *lineárny súčet* podpriestorov S a T .

Veta 4.5.3. Nech S a T sú podpriestory vektorového priestoru V nad polom F . Nech $S = [\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n]$, $T = [\vec{\beta}_1, \dots, \vec{\beta}_m]$. Potom $S + T = [\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n, \vec{\beta}_1, \dots, \vec{\beta}_m]$.

Veta 4.5.4. Nech S, T sú podpriestory konečnorozmerného priestoru V . Potom¹

$$d(S) + d(T) = d(S + T) + d(S \cap T).$$

Definícia 4.5.5. Nech S, T sú podpriestory vektorového priestoru V nad polom F a nech $S \cap T = \{\vec{0}\}$. Potom podpriestor $S + T$ nazývame *direktný (priamy) súčet* podpriestorov S a T a označujeme ho $S \oplus T$.

Veta 4.5.6. Nech S, T, P sú podpriestory konečnorozmerného vektorového priestoru V nad polom F . Tieto podmienky sú potom ekvivalentné:

- (i) $P = S \oplus T$
- (ii) $P = S + T$ a $d(P) = d(S) + d(T)$
- (iii) Ak $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n$ je báza podpriestoru S a $\vec{\beta}_1, \dots, \vec{\beta}_m$ je báza podpriestoru T , tak $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n, \vec{\beta}_1, \dots, \vec{\beta}_m$ je báza podpriestoru P .
- (iv) $P = S + T$ a každý vektor $\vec{\gamma} \in P$ sa dá jediným spôsobom vyjadriť v tvare $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$, kde $\vec{\alpha} \in S$ a $\vec{\beta} \in T$. (T.j. ak $\vec{\gamma} = \vec{\alpha}_1 + \vec{\beta}_1 = \vec{\alpha}_2 + \vec{\beta}_2$, pričom $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2 \in S$ a $\vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2 \in T$, tak $\vec{\alpha}_1 = \vec{\alpha}_2$ a $\vec{\beta}_1 = \vec{\beta}_2$.)

¹Tento vzorec pripomína vzorec pre počet prvkov zjednotenia dvoch množín $|S \cup T| = |S| + |T| - |S \cap T|$.

Kapitola 5

Lineárne zobrazenia a matice

5.1 Matice

Definícia 5.1.1. *Maticou* typu $m \times n$ nad poľom F nazývame ľubovoľnú tabuľku pozostávajúcu z prvkov poľa F , ktorá má m riadkov a n stĺpcov.

Definícia 5.1.2. Nech A, B sú matice typu $m \times n$ nad poľom F a $c \in F$.

(a) Súčet matíc $A = \|a_{ij}\|$ a $B = \|b_{ij}\|$ je matica $A + B = \|a_{ij} + b_{ij}\|$.

(b) Matica $c.A = \|ca_{ij}\|$ sa nazýva *c-násobok* matice A .

(Teda sčítovanie matíc a násobenie matice skalárom definujeme po súradniciach.)

Veta 5.1.3. *Matice typu $m \times n$ nad poľom F s takto definovaným sčítovaním a násobením skalármi tvoria vektorový priestor nad poľom F .*

Definícia 5.1.4. Maticu typu $n \times n$ (teda takú, ktorá má rovnaký počet riadkov a stĺpcov) nazývame *štvorcová matica*.

Maticu

$$I = I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

typu $n \times n$, ktorá má na diagonále jednotky a mimo diagonály nuly, nazývame *jednotková matica*.

Štvorcová matica, ktorá má mimo diagonály iba nuly (t.j. $a_{ij} = 0$ pre $i \neq j$) sa nazýva *diagonálna matica*. (Príkladom diagonálnej matice je jednotková matica.)

Definícia 5.1.5. *Transponovaná matica* k matici A typu $m \times n$ je matica A^T typu $n \times m$ určená ako

$$A^T = \|a_{ji}\|.$$

Štvorcová matica A sa nazýva *symetrická*, ak $A = A^T$ a *antisymetrická*, ak $A = -A^T$.

5.2 Riadková ekvivalencia a hodnosť matice

Definícia 5.2.1. *Podpriestorom prislúchajúcim matici A typu $m \times n$ nad poľom F nazývame podpriestor priestoru F^n generovaný riadkami matice A . Označujeme ho V_A .*

Definícia 5.2.2. *Elementárne riadkové operácie na matici A nad poľom F sú:*

1. výmena 2 riadkov matice,
2. vynásobenie niektorého riadku matice nenulovým prvkom c poľa F ,
3. pripočítanie násobku niektorého riadku k inému riadku.

Hovoríme, že matice A a B sú *riadkovo ekvivalentné* ak maticu B možno z A dostať pomocou konečnej postupnosti elementárnych riadkových operácií. Ak matice A a B sú riadkovo ekvivalentné, zapisujeme to ako $A \sim B$.

Veta 5.2.3. *Elementárne riadkové operácie nemenia podpriestor prislúchajúci danej matici. (Teda riadkovo ekvivalentným maticiam zodpovedá rovnaký podpriestor.)*

Definícia 5.2.4. *Matica A je redukovaná trojuholníková matica, ak:*

- (i) Vedúci (=prvý nenulový) prvok každého riadku matice je 1.
- (ii) Každý stĺpec obsahujúci vedúci prvok niektorého riadku má prvky v ostatných riadkoch nulové.
- (iii) Nulové riadky ležia pod nenulovými riadkami. (Presnejšie povedané: Akýkoľvek nulový riadok musí byť nižšie ako akýkoľvek nenulový riadok.)
- (iv) Vedúci prvok ľubovoľného nenulového riadku je napravo od vedúcich prvkov všetkých nenulových riadkov nad ním a naľavo od vedúcich prvkov riadkov pod ním (t.j. vedúce riadky sú usporiadané zľava doprava).

Veta 5.2.5. *Každá matica nad poľom F je riadkovo ekvivalentná s nejakou redukovanou trojuholníkovou maticou.*

Veta 5.2.6. *Nenulové riadky redukovanej trojuholníkovej matice sú lineárne nezávislé.*

Definícia 5.2.7. *Hodnosť matice A je dimenzia podpriestoru V_A prislúchajúceho tejto matici. Označujeme ju $h(A)$.*

Lema 5.2.8. *Nech A je redukovaná trojuholníková matica typu $m \times n$ nad poľom F . Označme jej nenulové riadky $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_k$ a ako i_1, \dots, i_k označme čísla stĺpcov, v ktorých sú vedúce jednotky. Potom $\vec{\alpha} = (c_1, \dots, c_n) \in V_A$ práve vtedy, keď $\vec{\alpha} = c_{i_1} \vec{\alpha}_1 + c_{i_2} \vec{\alpha}_2 + \dots + c_{i_k} \vec{\alpha}_k$.*

Veta 5.2.9. *Ak A a B sú redukované trojuholníkové matice rovnakého typu $m \times n$ nad poľom F a $V_A = V_B$, tak $A = B$.*

Dôsledok 5.2.10. *Nech A a B sú matice typu $m \times n$ nad poľom F . Nasledovné podmienky sú ekvivalentné:*

- (i) A a B sú riadkovo ekvivalentné,
- (ii) $V_A = V_B$,
- (iii) A a B sú riadkovo ekvivalentné s tou istou redukovanou trojuholníkovou maticou.

5.3 Lineárne zobrazenia

Definícia 5.3.1. Ak V a W sú vektorové priestory nad poľom F a $f: V \rightarrow W$ je zobrazenie z V do W , tak hovoríme, že f je *lineárne zobrazenie*, ak pre ľubovoľné $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \in V$ a ľubovoľné $c \in F$ platí

$$(i) f(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) = f(\vec{\alpha}) + f(\vec{\beta}),$$

$$(ii) f(c\vec{\alpha}) = cf(\vec{\alpha}).$$

Veta 5.3.2. Nech V, W sú vektorové priestory nad poľom F a $f: V \rightarrow W$ je zobrazenie. Nasledujúce podmienky sú ekvivalentné:

(a) zobrazenie f je lineárne,

$$(b) f(c\vec{\alpha} + d\vec{\beta}) = cf(\vec{\alpha}) + df(\vec{\beta}) \text{ pre ľubovoľné } c, d \in F \text{ a ľubovoľné } \vec{\alpha}, \vec{\beta} \in V,$$

$$(c) f(c_1\vec{\alpha}_1 + \dots + c_n\vec{\alpha}_n) = c_1f(\vec{\alpha}_1) + \dots + c_nf(\vec{\alpha}_n) \text{ pre ľubovoľné } c_1, \dots, c_n \in F, \vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n \in V.$$

Tvrdenie 5.3.3. Ak f je lineárne zobrazenie, tak $f(\vec{0}) = \vec{0}$.

Veta 5.3.4. Nech V, W sú vektorové priestory. Nech $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n$ je báza priestoru V a nech $\vec{\beta}_1, \dots, \vec{\beta}_n \in W$. Potom existuje práve jedno lineárne zobrazenie $f: V \rightarrow W$ také, že

$$f(\vec{\alpha}_i) = \vec{\beta}_i$$

pre $i = 1, 2, \dots, n$.

Definícia 5.3.5. Nech F je pole. Matica lineárneho zobrazenia $f: F^m \rightarrow F^n$ je matica typu $m \times n$ ktorej k -ty riadok je vektor $f(\vec{\epsilon}_k)$.

Veta 5.3.6. Nech U, V, W sú vektorové priestory nad tým istým poľom F . Ak $f: U \rightarrow V$ a $g: V \rightarrow W$ sú lineárne zobrazenia, tak aj $g \circ f$ je lineárne zobrazenie.

5.4 Súčin matíc

Definícia 5.4.1. Ak A je matica typu $m \times n$ a B je matica typu $n \times k$ nad poľom F , tak maticu $C = \|c_{ij}\|$ typu $m \times k$, kde

$$c_{ij} = \sum_{t=1}^n a_{it}b_{tj}$$

pre $i = 1, 2, \dots, m$ a $j = 1, 2, \dots, k$, nazývame *súčin matíc* A a B . Označujeme ju $A.B$.

Veta 5.4.2. Nech F je pole, $f: F^m \rightarrow F^n$ a $g: F^n \rightarrow F^k$ sú lineárne zobrazenia. Potom platí

$$A_{g \circ f} = A_f.A_g$$

Dôsledok 5.4.3. Násobenie matíc je asociatívne, teda

$$A.(B.C) = (A.B).C$$

pre ľubovoľné matice také, že ich možno násobiť v uvedenom poradí.

Veta 5.4.4. *Nech matice A, B, C nad polom F sú majú také rozmery, že uvedené súčty a súčiny majú zmysel.*

$$\begin{aligned} I_m A &= A = A I_n \\ A(B + C) &= AB + AC \\ (B + C)D &= BD + CD \end{aligned}$$

5.5 Inverzná matica

Veta 5.5.1. *Ak $f: V \rightarrow W$ je lineárne zobrazenie a existuje inverzné zobrazenie $f^{-1}: W \rightarrow V$, tak f^{-1} je lineárne zobrazenie.*

Lema 5.5.2. *Nech $f: V \rightarrow W$ je lineárne zobrazenie a $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n$ je báza priestoru V .*

- (i) *Zobrazenie f je injekcia práve vtedy, keď vektory $f(\vec{\alpha}_1), \dots, f(\vec{\alpha}_n)$ sú lineárne nezávislé.*
- (ii) *Zobrazenie f je surjekcia práve vtedy, keď $[f(\vec{\alpha}_1), \dots, f(\vec{\alpha}_n)] = W$ (teda ak vektory $f(\vec{\alpha}_1), \dots, f(\vec{\alpha}_n)$ generujú celý priestor W).*

Veta 5.5.3. *Nech $f: V \rightarrow W$ je lineárne zobrazenie a $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n$ je báza priestoru V . Zobrazenie f je bijekcia práve vtedy, keď vektory $f(\vec{\alpha}_1), \dots, f(\vec{\alpha}_n)$ tvoria bázu vektorového priestoru W .*

Dôsledok 5.5.4. *Nech $f: F^n \rightarrow F^n$ je lineárne zobrazenie. Nasledujúce podmienky sú ekvivalentné:*

- (i) *f je bijekcia,*
- (ii) *f je prosté,*
- (iii) *f je surjektívne.*

Dôsledok 5.5.5. *Nech $f: F^n \rightarrow F^n$ je lineárne zobrazenie. Nasledujúce podmienky sú ekvivalentné:*

- (a) *zobrazenie f je bijekcia,*
- (b) *existuje inverzné zobrazenie f^{-1} ,*
- (c) *$h(A_f) = n$.*

Definícia 5.5.6. *Nech A je matica typu $n \times n$. Hovoríme, že matica B je inverzná k matici A , ak platí*

$$AB = BA = I_n.$$

Označujeme ju $B =: A^{-1}$.

Definícia 5.5.7. *Štvorcová matica typu $n \times n$ sa nazýva regulárna, ak $h(A) = n$.*

Veta 5.5.8. *Nech A je matica typu $n \times n$. K matici A existuje inverzná matica práve vtedy, keď A je regulárna.*

Definícia 5.5.9. *Bijektívne lineárne zobrazenie $f: V \rightarrow W$ nazývame izomorfismus vektorových priestorov V a W (alebo tiež lineárny izomorfizmus).*

Ak existuje bijektívne zobrazenie $f: V \rightarrow W$, hovoríme, že vektorové priestory V a W sú izomorfné. Fakt, že V a W sú izomorfné označujeme $V \cong W$.

Dôsledok 5.5.10. Ak V, W sú konečnorozmerné vektorové priestory a $V \cong W$, tak $d(V) = d(W)$.

Veta 5.5.11. Nech V je vektorový priestor nad poľom F a $d(V) = n$. Potom V je izomorfný s priestorom F^n .

5.6 Elementárne riadkové operácie a súčin matíc

Definícia 5.6.1. Pre ľubovoľnú elementárnu riadkovú operáciu na matici typu $m \times n$ nazveme *maticou elementárnej riadkovej operácie* maticu typu $m \times m$, ktorá vznikne vykonaním tejto operácie na jednotkovej matici I_m .

Tvrdenie 5.6.2. Ak matica B vznikne z matice A vykonaním nejakej elementárnej riadkovej operácie a E je matica tejto riadkovej operácie, tak $B = E.A$.

Tvrdenie 5.6.3. Ak matica B vznikne z matice A vykonaním nejakej elementárnej stĺpcovej operácie a E je matica tejto stĺpcovej operácie, tak $B = A.E$.

5.7 Sústavy lineárnych rovníc

Definícia 5.7.1. Sústavou lineárnych rovníc rozumieme systém rovníc tvaru

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= c_2 \\ &\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= c_m \end{aligned} \tag{5.1}$$

kde $a_{ij}, c_i \in F$ pre všetky prípustné hodnoty indexov i a j .

Riešenie sústavy lineárnych rovníc je n -ticia (x_1, \dots, x_n) ktorá spĺňa všetky uvedené rovnice. Ak existuje aspoň jedno riešenie sústavy lineárnych rovníc, hovoríme, že táto sústava je *riešiteľná*. Skaláry c_1, \dots, c_n nazývame *pravé strany*, a_{ij} sú *koefficienty* a x_i sú *neznáme*.

Maticu

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

nazývame *matica sústavy* (5.1).

Maticu

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & c_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & c_m \end{pmatrix}$$

nazývame *rozšírená matica sústavy* (5.1).

Veta 5.7.2. Ak rozšírené matice dvoch sústav lineárnych rovníc sú riadkovo ekvivalentné, tak tieto dve sústavy majú rovnakú množinu riešení.

5.7.1 Homogénne sústavy lineárnych rovníc

Veta 5.7.3. Množina všetkých riešení homogénnej sústavy lineárnych rovníc tvorí podpriestor priestoru F^n .

$$\begin{aligned} x_1 + c_{1,r+1}x_{r+1} + c_{1,r+2}x_{r+2} + \dots + c_{1,n}x_n &= 0 \\ x_2 + c_{2,r+1}x_{r+1} + c_{2,r+2}x_{r+2} + \dots + c_{2,n}x_n &= 0 \\ &\dots \\ x_r + c_{r,r+1}x_{r+1} + c_{r,r+2}x_{r+2} + \dots + c_{r,n}x_n &= 0 \end{aligned} \tag{5.2}$$

Veta 5.7.4. Vektory $\vec{\gamma}_{r+1}, \vec{\gamma}_{r+2}, \dots, \vec{\gamma}_n$ tvoria bázu priestoru riešení homogénnej sústavy (5.2).

Dôsledok 5.7.5. Nech A je matica typu $m \times n$ a S je priestor riešení homogénnej sústavy lineárnych rovníc s maticou A . Potom

$$d(S) = n - h(A).$$

Dôsledok 5.7.6. Homogénna sústava lineárnych rovníc s n neznámymi, ktorej matica má hodnotu n , má len triviálne riešenie.

Veta 5.7.7. Každý podpriestor priestoru F^n je množinou riešení nejakého homogénneho systému lineárnych rovníc.

5.7.2 Gaussova eliminačná metóda

5.7.3 Frobeniova veta

Veta 5.7.8. Pre každú maticu A nad poľom F platí $h(A) = h(A^T)$.

Veta 5.7.9 (Frobeniova). Nehomogénna sústava lineárnych rovníc (5.1) je riešiteľná práve vtedy, keď matica sústavy a rozšírená matica sústavy majú rovnakú hodnotu, t.j.

$$h(A) = h(A').$$

Veta 5.7.10. Nech $\vec{\alpha}$ je riešenie sústavy lineárnych rovníc

$$A \cdot \vec{\alpha}^T = \vec{\gamma}^T \tag{N}$$

a S je podpriestor pozostávajúci zo všetkých riešení homogénneho systému

$$A \cdot \vec{\alpha}^T = \vec{0}^T. \tag{H}$$

Potom $T = \{\vec{\alpha} + \vec{\beta}; \vec{\beta} \in S\}$ je množina všetkých riešení (N).

5.8 Jadro a obraz lineárneho zobrazenia

Definícia 5.8.1. Nech V a W sú vektorové priestory nad poľom F a $f: V \rightarrow W$ je lineárne zobrazenie. Potom *jadrom lineárneho zobrazenia* f nazývame množinu

$$\text{Ker } f = \{\vec{\alpha} \in V; f(\vec{\alpha}) = \vec{0}\}$$

a *obrazom lineárneho zobrazenia* f nazývame množinu

$$\text{Im } f = \{f(\vec{\alpha}); \vec{\alpha} \in V\}.$$

Tvrdenie 5.8.2. *Nech V a W sú vektorové priestory nad poľom F a $f: V \rightarrow W$ je lineárne zobrazenie. Potom $\text{Ker } f$ je vektorový podpriestor priestoru V a $\text{Im } f$ je vektorový podpriestor priestoru W .*

Tvrdenie 5.8.3. *Nech $f: V \rightarrow W$ je lineárne zobrazenie a $V = [\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n]$. Potom $\text{Im } f = [f(\vec{\alpha}_1), \dots, f(\vec{\alpha}_n)]$.*

Tvrdenie 5.8.4. *Nech V a W sú vektorové priestory nad poľom F a $f: V \rightarrow W$ je lineárne zobrazenie.*

Zobrazenie f je injektívne práve vtedy, keď $\text{Ker } f = \{\vec{0}\}$.

Tvrdenie 5.8.5. *Nech V a W sú vektorové priestory nad poľom F a $f: V \rightarrow W$ je lineárne zobrazenie.*

Zobrazenie f je surjektívne práve vtedy, keď $\text{Im } f = W$.

Dôsledok 5.8.6. *Lineárne zobrazenie $f: V \rightarrow W$ je izomorfizmus práve vtedy, keď $\text{Im } f = W$ a $\text{Ker } f = \{\vec{0}\}$.*

Veta 5.8.7. *Nech V a W sú konečnorozmerné vektorové priestory a $f: V \rightarrow W$ je lineárne zobrazenie. Potom*

$$d(V) = d(\text{Ker } f) + d(\text{Im } f).$$

5.9 Hodnosť transponovanej matice

5.10 Násobenie blokových matíc*

Tvrdenie 5.10.1. *Nech*

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{m1} & \dots & A_{mn} \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} B_{11} & \dots & B_{1k} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & \dots & A_{nk} \end{pmatrix}$$

sú blokové matice a navyše pre ľubovoľné prípustné i, j, k majú príslušné bloky A_{ij} a B_{jk} také rozmery, že sa tieto matice dajú násobiť. Potom ich súčin $C = AB$ sa dá zapísať ako bloková matica pozostávajúca z $m \times k$ blokov

$$C = \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1k} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{m1} & \dots & A_{mk} \end{pmatrix}$$

pričom

$$C_{ij} = \sum_{s=1}^n A_{is} B_{sj}$$

pre $i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, k$.

Kapitola 6

Determinanty

6.1 Motivácia

6.2 Definícia determinantu

Definícia 6.2.1. V tejto kapitole budeme označovať ako S_n množinu všetkých permutácií množiny $\{1, 2, \dots, n\}$.

Dvojica $(\varphi(k), \varphi(s))$ sa volá *inverzia* permutácie φ , ak $k < s$ ale $\varphi(k) > \varphi(s)$. Počet inverzií permutácie φ budeme označovať $i(\varphi)$.

Definícia 6.2.2. Nech A je matica typu $n \times n$ nad polom F , $A = \|a_{ij}\|$. *Determinant matice* A je

$$|A| = \sum_{\varphi \in S_n} (-1)^{i(\varphi)} a_{1\varphi(1)} a_{2\varphi(2)} \cdots a_{n\varphi(n)}. \quad (6.1)$$

Veta 6.2.3. Nech A je matica typu $n \times n$. Potom

$$|A| = |A^T|.$$

6.3 Výpočet determinantov

6.3.1 Laplaceov rozvoj

Veta 6.3.1. Pre algebraický doplnok prvku a_{rs} štvorcovej matice A platí

$$A_{rs} = (-1)^{r+s} |M_{rs}|$$

Dôsledok 6.3.2 (Laplaceov rozvoj determinantu). Nech A je matica typu $n \times n$. Potom

$$|A| = (-1)^{i+1} a_{i1} |M_{i1}| + (-1)^{i+2} a_{i2} |M_{i2}| + \dots + (-1)^{i+n} a_{in} |M_{in}| \quad (6.2)$$

$$|A| = (-1)^{j+1} a_{1j} |M_{1j}| + (-1)^{j+2} a_{2j} |M_{2j}| + \dots + (-1)^{j+n} a_{nj} |M_{nj}| \quad (6.3)$$

6.3.2 Výpočet pomocou riadkových a stĺpcových operácií

Veta 6.3.3. Ak maticu B získame z A vynásobením k -teho riadku skalárom $c \in F$, tak

$$|B| = c|A|.$$

Dôsledok 6.3.4. Ak matica A má nulový riadok, tak $|A| = 0$.

Veta 6.3.5. Ak má matica A dva rovnaké riadky, tak $|A| = 0$.

Veta 6.3.6. Nech matice A a B sú matice typu $n \times n$, ktoré sa líšia len v k -tom riadku. Potom $|A| + |B| = |C|$, kde $c_{ij} = a_{ij} = b_{ij}$ pre $i \neq k$ a $c_{kj} = a_{kj} + b_{kj}$.

Veta 6.3.7. Ak matica B vznikne z A pripočítaním c -násobku niektorého riadku k inému (pričom $c \in F$), tak $|B| = |A|$.

Veta 6.3.8. Ak matica B vznikne z A vzájomnou výmenou dvoch riadkov, tak $|B| = -|A|$. (Výmena 2 riadkov matice mení znamienko determinantu.)

Veta 6.3.9. Ak A je horná trojuholníková matica (pod hlavnou diagonálou má nuly), tak determinant matice A sa rovná súčinu prvkov na diagonále.

$$|A| = a_{11}a_{22} \dots a_{nn}$$

Dôsledok 6.3.10. Determinant diagonálnej matice sa rovná súčinu diagonálnych prvkov.

$$\begin{vmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{vmatrix} = d_1 d_2 \dots d_n$$

Veta 6.3.11. Nech A je štvorcová matica typu $n \times n$. Matica A je regulárna práve vtedy, keď $|A| \neq 0$.

6.4 Determinant súčinu matíc

Veta 6.4.1. Nech A, B sú dve matice typu $n \times n$ nad poľom F . Potom platí

$$|A \cdot B| = |A| \cdot |B|.$$

6.5 Využitie determinantov

6.5.1 Výpočet inverznej matice

Veta 6.5.1. Ak A je regulárna matica typu $n \times n$, tak

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

kde A_{ij} označuje algebraický doplnok prvku a_{ij} .

6.5.2 Cramerovo pravidlo

Dodatok A

Delenie so zvyškom

Dodatok B

Komplexné čísla

B.1 Definícia komplexných čísel, algebraický tvar komplexného čísla

Definícia B.1.1. *Komplexným číslom* budeme nazývať ľubovoľné číslo tvaru

$$a + bi,$$

kde $a, b \in \mathbb{R}$. Množinu všetkých komplexných čísel označujeme

$$\mathbb{C} = \{a + bi; a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Zápis komplexného čísla v tvare $a + bi$ nazývame *algebraický zápis* komplexného čísla. Prítom a sa nazýva *reálna časť* komplexného čísla a bi sa nazýva *imaginárna časť* komplexného čísla. Pre komplexné číslo $z = a + bi$ označujeme jeho reálnu časť $\operatorname{Re} z = a$ a imaginárnu časť $\operatorname{Im} z = bi$. (Niekedy sa tiež používa označenie $\Re z$ a $\Im z$.) Číslo, ktoré má nulovú reálnu časť, sa nazýva *rydzoimaginárne*.

Komplexné číslo je jednoznačne určené svojou reálnou a imaginárnou časťou, teda dve komplexné čísla $z_1 = a_1 + b_1i$ a $z_2 = a_2 + b_2i$ sa rovnajú práve vtedy, keď

$$a_1 = a_2 \quad \text{a} \quad b_1 = b_2.$$

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i \quad (\text{B.1})$$

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (bc + ad)i \quad (\text{B.2})$$

Veta B.1.2. *Komplexné čísla s operáciami $+$ a \cdot definovanými vzťahmi (B.1) a (B.2) tvoria pole.*

Definícia B.1.3. *Komplexne združeným číslom* k číslu $z = a + bi$ nazývame číslo $\bar{z} = a - bi$.

B.2 Geometrická interpretácia komplexných čísel, goniometrický tvar, Moivrova veta

Definícia B.2.1. Zápis komplexného čísla v tvare

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

nazývame *goniometrický zápis* komplexného čísla. Číslo $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ nazývame *absolútna hodnota* alebo tiež *modul* komplexného čísla z a označujeme ho $|z|$. Číslo φ také, že $a = r \cos \varphi$ a $b = r \sin \varphi$ nazývame *argument* komplexného čísla z .

Veta B.2.2 (Moivrova veta). *Nech $z_1 = r_1(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ a $z_2 = r_2(\cos \beta + i \sin \beta)$. Potom pre ich súčin platí*

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta)). \quad (\text{B.3})$$

Špeciálne z toho vyplýva, že pre absolútne hodnoty platí

$$|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|. \quad (\text{B.4})$$

Dôsledok B.2.3. *Ak $n \in \mathbb{N}$ a $z = r(\cos \alpha + i \sin \alpha)$, tak*

$$z^n = r^n (\cos(n\alpha) + i \sin(n\alpha))$$

B.3 Riešenie rovníc v komplexných číslach

Veta B.3.1 (Základná veta algebry). *Každý polynóm s komplexnými koeficientami má koreň v \mathbb{C} . T.j. ak*

$$f(x) = c_n x^n + \dots + c_1 x + c_0,$$

tak existuje $z \in \mathbb{C}$ také, že $f(z) = 0$.

B.3.1 Kvadratické rovnice s reálnymi koeficientmi

B.3.2 Binomické rovnice

B.4 Zopár ďalších vecí súvisiacich s komplexnými číslami

Literatúra