

Cvičenie 2 - podgrupy

Úloha 1. Ukážte, že $H = \{\frac{m}{n}; m, n \text{ sú nepárne}\}$ je podgrupa grupy $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$.

Úloha 2. Tvorí daná podmnožina podgrupu danej grupy:

- \mathbb{N} v $(\mathbb{Z}, +)$;
- $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ v $(\mathbb{R}^2, +)$;
- $\{z \in \mathbb{C}; z^5 = 1\}$ v $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$;
- $\{id, (\frac{1}{2} \frac{2}{3} \frac{3}{1}), (\frac{1}{2} \frac{2}{1} \frac{3}{3})\}$ v (S_3, \circ) ;
- $\{(\begin{smallmatrix} a & b \\ -b & a \end{smallmatrix}); a, b \in \mathbb{R}, (a, b) \neq (0, 0)\}$ v grupe všetkých regulárnych matíc 2×2 s operáciou násobenia matíc.

Úloha 3. Ak A, B, C sú podgrupy G a $C \subseteq A \cup B$, tak $C \subseteq A$ alebo $C \subseteq B$.

Úloha 4. Nájdite príklad nekonečnej grupy, ktorá obsahuje netriviálnu konečnú podgrupu. (Pod netriviálnou podgrupou tu rozumieme podgrupu, ktorá má viac ako jeden prvok.)

Úloha 5. Nájdite všetky podgrupy grupy $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ (súčin dvoch grúp sme definovali na minulom cvičení) a všetky podgrupy grupy \mathbb{Z}_4 (v oboch prípadoch operácia \oplus). Majú tieto grupy rovnaký počet dvojprvkových podgrúp? Dá sa to nejakou použiť na zdôvodnenie, že tieto dve grupy nie sú izomorfné?

Úloha 6. Nech V je vektorový priestor nad poľom \mathbb{R} . Je aj každá podgrupa grupy $(V, +)$ podpriestorom priestoru V ? Ako je to s vektorovými priestormi nad poľom \mathbb{Z}_p ?

Úloha 7. Nech H je podgrupa grupy G . Nech $g \in G$. Ukážte, že $gHg^{-1} = \{ghg^{-1}; h \in H\}$ je podgrupa grupy G .

Úloha 8. Ukážte, že ak G je grupa a $a \in G$, tak zobrazenie $f_a: G \rightarrow G$ definované ako $f_a(x) = axa^{-1}$ je izomorfizmus.

Úloha 9. Dokážte, že $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{(0, 0)\}$ s operáciou $*$ definovanou ako $(a, b) * (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$ tvorí grupu. (Hint: Dalo by sa nájsť jednoduché riešenie s pomocou niektorej grupy z úlohy 2 alebo pomocou inej známej grupy?)