Cvičenie 3 - homomorfizmy, izomorfizmy

Na pripomenutie: Homomorfizmus $f\colon (G,\circ) \to (H,*)$

$$f(g_1 \circ g_2) = f(g_1) * f(g_2)$$

Bijektívny homomorfizmus voláme izomorfizmus (injektívny homomorfizmus voláme monomorfizmus, surjektívny homomorfizmus voláme epimorfizmus).

Ak existuje epimorfizmus $f\colon (G,*) \to (H,\circ)$, tak hovoríme, že grupa H je homomorfným obrazom grupy G.

Úloha 1. Zistite, či sú grupy G a H izomorfné:
a) $G = (\mathbb{Z}_6, \oplus)$, $H = (S_3, \circ)$
b) $G = (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot) \times (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$, $H = (\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$
c) $G = (\mathbb{Z}_6, \oplus)$, $H = (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3, \oplus)$
d) $G = (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$, $H = (\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$
e) $G = (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2, +)$, $H = (\mathbb{Z}, +)$ (Sčitovanie v $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2$ chápeme tak, že na prvej súradnici používame obvyklé sčitovanie a na druhej sčitujeme modulo 2, t.j. tak ako sme definovali priamy súčin grúp.)

Úloha 2. Zistite, či sú grupy G a H izomorfné a či je grupa H homomorfným obrazom grupy G. Svoju odpoveď zdôvodnite!
a) $G = (\mathbb{R}, +) \times (\mathbb{R}, +)$, $H = (\mathbb{C}, +)$
b) $G = (\mathbb{Q}, +)$, $H = (\mathbb{R}, +)$
c) $G = (\mathbb{Q}, +)$, $H = (\mathbb{Q}^+, \cdot)$
d) $G = (\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$, $H = (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$
d) $G = (\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$, $H = (\mathbb{R}^+, \cdot)$
f) $G = (\mathbb{Q}, +)$, $H = (\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$

Úloha 3. Zistite, či sú grupy G a H izomorfné a či je niektorá z nich homomorfným obrazom druhej. Svoju odpoveď zdôvodnite!
a) $G = (\mathbb{R}, +)$, $H = (\mathbb{R}^+, \cdot)$
b) $G = (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$, $H = (\mathbb{R}^+, \cdot)$
c) $G = (\mathbb{Z}_4, \oplus)$, $H = (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, \oplus)$

Úloha 4. Nájdite izomorfizmus medzi $(\mathbb{C}\setminus\{0\}, \cdot)$ a $(G, \cdot)$, kde $G = \{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ -b & a \end{smallmatrix}\right); a, b \in \mathbb{R}, (a,b) \neq (0,0)\}$; operácia na G je obvyklé násobenie matíc. (O $(G,\cdot)$ vieme z minulého cvičenia, že je to grupa. Vedeli by sme zdôvodniť, že je to grupa, s použitím izomorfizmu nájdeného v tejto úlohe. Alebo obrátene, ak vieme, že G je grupa, mohli by sme tento fakt použiť spolu s existenciou izomorfizmu na zdôvodnenie toho, že $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$ je grupa?)

Úloha 5. Nech H je podgrupa grupy G. Nech $g \in G$. Ukážte, že $gHg^{-1} = \{ghg^{-1}; h \in H\}$ je podgrupa grupy G.

Úloha 6. Nech $(G, \circ)$ je grupa. Je zobrazenie $g \mapsto g^{-1}$ izomorfizmus z G na G? Ak nie, vedeli by ste definovať binárnu operáciu $*$ na G, tak, aby toto zobrazenie bol izomorfizmus grúp $(G, \circ)$ a $(G, *)$? Je uvedené zobrazenie izomorfizmom, ak G je komutatívna?

Úloha 7. Nech $f\colon G \to H$ je homomorfizmus grúp. Dokážte:
a) Zobrazenie f je surjektívne práve vtedy, keď $\operatorname{Im} f = H$.
b) Zobrazenie g je injektívne práve vtedy, keď $\operatorname{Ker} f = \{e\}$.

Úloha 8. Nech $a, b \in G$, kde G je grupa, $a, b \neq e$ také, že $ab = ba$ a $b^3 = 1$. Dokážte, že $\{a^n, ba^n, b^2a^n; n \in \mathbb{Z}\}$ je podgrupa grupy G.