Cvičenie 4 – permutácie; rád prvku

Permutácie

Na pripomenutie: Každú permutáciu vieme (jednoznačne) rozložiť na disjunktné cykly, z tohoto rozkladu vieme zistiť jej rád a paritu. Pre cykly ľahko vieme vyrátať inverznú permutáciu: $(1324)^{-1} = (4231)$.
Každý cyklus možno zapísať viacerými spôsobmi: $(1324) = (3241) = (2413) = (4132)$.

Disjunktné permutácie (a teda aj disjunktné cykly) komutujú.

Permutácie vieme rozložiť aj na transpozície. Cykly vieme rozložiť napríklad takto:
$(a_1a_2\dots a_n) = (a_1a_n)(a_1a_{n-1})\dots(a_1a_2)$ alebo $(a_1a_2\dots a_n) = (a_{n-1}a_n)\dots(a_2a_n)(a_1a_n)$
Permutácia je *párna* $\Leftrightarrow$ má párny počet inverzií $\Leftrightarrow$ dá sa rozložiť na párny počet permutácií.
Pri skladaní permutácií sa parita permutácií správa podobne ako parita celých čísel pri sčitovaní.

Úloha 1. V tejto úlohe budeme pracovať s permutáciami množiny $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ (čiže prvkami grupy S_8) a budeme zadané permutácie aj výsledky vždy zapisovať ako súčiny disjunktných cyklov: Označme
$\varphi = (14)(235)(78)$
$\psi = (234)(67)$
$\tau = (135)(24)(68)$
a) Vypočítajte $(\varphi \circ \psi) \circ \tau$ a $\varphi \circ (\psi \circ \tau)$
b) Ku každej z uvedených permutácií vypočítajte inverznú permutáciu.
c) Zistite rád a paritu permutácií φ, ψ, τ a aj permutácií, ktoré sme dostali ako výsledky v predchádzajúcich častiach tejto úlohy.

Úloha 2. Pre dané permutácie určte rád, paritu, a rozklad na disjunktné cykly:
$\varphi = \left(\begin{smallmatrix}1&2&3&4&5\\2&3&4&5&1\end{smallmatrix}\right)$, $\tau = \left(\begin{smallmatrix}1&2&3&4&5\\2&1&4&5&3\end{smallmatrix}\right)$, $\psi = \left(\begin{smallmatrix}1&2&3&4&5\\3&2&1&5&4\end{smallmatrix}\right)$.
Ďalej vypočítajte permutácie $\varphi\tau\psi$, φ^{-1}, τ^{-1}, ψ^{-1}.

Úloha 3. Vypočítajte $\varphi \circ \psi$ a $\psi \circ \varphi$ pre:
a) $\varphi = (14)(5678)$, $\psi = (23)(5678)$
b) $\varphi = (124)(5678)$, $\psi = (23)(5678)$.
Je niektorý z týchto prípadov príkladom nedisjunktných permutácií, ktoré komutujú?

Úloha 4. Dokážte, že grupa S_n je generovaná:
a) Množinou všetkých transpozícií.
b) Množinou transpozícií $\{(12),(13),\dots,(1n)\}$.
c) Množinou transpozícií $\{(12),(23),\dots,(n-1,n)\}$.
d) Transpozíciou (12) a cyklom $(12\dots n)$. (Hint: Skúste vyrátať $(12\dots n)^{-k}(12)(12\dots n)^k$.)

Úloha 5. Nech $\sigma = (a_1a_2\dots a_n)$ je cyklus, ako vyzerá permutácia $\tau\sigma\tau^{-1}$?

Všeobecnejšie, ako poznám počet a dĺžky cyklov v rozklade permutácie φ, viem niečo povedať o rozklade permutácie $\tau\varphi\tau^{-1}$ na disjunktné cykly.

Rád prvku

Úloha 6. Nech G je grupa, $a \in G$. Dokážte, že zobrazenie $f_a \colon G \to G$ definované predpisom $f_a(x) = axa^{-1}$ je izomorfizmus.

Úloha 7. V každej grupe majú nasledujúce prvky rovnaký rád: x a yxy^{-1}; ab a ba; abc, bca a cab. Naopak, prvky abc a cba môžu mať rôzny rád. (Hint: Jedna možnosť ako dokázať, že dva prvky $g, h \in G$ majú rovnaký rád je dokázať ekvivalenciu $g^n = e \Leftrightarrow h^n = e$. Iná možnosť je nájsť izomorfizmus $f \colon G \to G$ taký, že $f(g) = h$, a použiť fakty, že izomorfizmy zachovávajú rád prvkov.)

Úloha 8. Ak rád prvku a v grupe G je n a e je neutrálny prvok tejto grupy, tak pre prirodzené čísla $k \in \mathbb{N}$ platí $a^k = e$ práve vtedy, keď $n \mid k$. Ďalej pre každé $s \in \mathbb{N}$ existuje $m \in \mathbb{N}$ také, že $a^s = a^m$ a $0 \leq m \leq n-1$.

Úloha 9. Nech G je grupa, $a \in G$ je prvok konečného rádu n. Nech H je podgrupa grupy G a $k = \min\{j \in \mathbb{N}; j > 0, a^j \in H\}$, t.j. k je najmenšie kladné prirodzené číslo také, že $a^k \in H$. Dokážte, že $k \mid n$; t.j. k delí rád prvku g.