Cvičenia 6, 7

Príklady z tejto sady úloh by nám mali vystačiť na viac než jeden týždeň. Keď dokončíme témy v tejto sade, tak budeme mať vlastne prebratú látku na prvú písomku.

Rozklad grupy podľa podgrupy

Na pripomenutie: Ak H je podgrupa G, tak ľavé triedy

$$aH = \{ah; h \in H\}$$

tvoria ľavý rozklad G podľa H. (Podobne pravé triedy tvoria pravý rozklad.)

Počet ľavých a pravých tried je rovnaký, značíme ho $[G : H]$. Platí $|G| = [G : H]|H|$ (Lagrangeova veta).

Úloha 1. Ak G je konečná grupa, H je podgrupa G a K je podgrupa H, tak platí rovnosť $[G : K] = [G : H][H : K]$.

Úloha 2. Ak p je prvočíslo a $k \geq 1$ prirodzené číslo, tak každá p^k-prvková grupa má p-prvkovú podgrupu.

Normálne podgrupy

Podgrupu H grupy G voláme normálna (invariantná), ak spĺňa niektorú z týchto (ekvivalentných) podmienok:

(i) $aH = Ha$ pre všetky $a \in G$,

(ii) $aH \subseteq Ha$ pre všetky $a \in G$,

(iii) $Ha \subseteq aH$ pre všetky $a \in G$,

(iv) $aHa^{-1} \subseteq H$ pre všetky $a \in G$,

(v) $aHa^{-1} = H$ pre všetky $a \in G$,

(vi) $\{aH; a \in G\} = \{Hb; b \in G\}$.

Podmienku (iv) môžeme prepísať ako

$$h \in H \qquad \Rightarrow \qquad aha^{-1} \in H.$$

Každá podgrupa komutatívnej grupy je normálna. Pre nekomutatívne grupy to vo všeobecnosti neplatí.

Úloha 3. Ak H je podgrupa G a $[G : H] = 2$, tak H je normálna podgrupa. Navyše, pre každý prvok $G \setminus H$ platí $x^2 \in H$.

Úloha 4. Ak H a H' sú normálne podgrupy G také, že $H \cap H' = \{e\}$, tak $hh' = h'h$ pre ľubovoľné $h \in H$ a $h' \in H'$ (ľubovoľný prvok H komutuje s ľubovoľným prvkom H'.)

Úloha 5. Dokážte, že ľubovoľná normálna podgrupa A_n pre $n \geq 5$, ktorá obsahuje aspoň jeden cyklus dĺžky 3 je celá grupa A_n.

Faktorové grupy

Ak H je normálna podgrupa grupy G, tak na množine G/H tried rozkladu sa dá zadefinovať binárna operácia predpisom

$$(aH)(bH) = (ab)H.$$

Takto dostaneme *faktorovú grupu* grupy G podľa podgrupy H.

Veta o izomorfizme: Ak $f\colon G \to G'$ je homomorfizmus grúp, tak $\operatorname{Ker} f$ je normálna podgrupa grupy G a faktorová grupa $G/\operatorname{Ker} f$ je izomorfná s podgrupou $\operatorname{Im} f$ grupy G'.

Úloha 6. Nech G je grupa všetkých regulárnych matíc typu $n \times n$ (s operáciou násobenia matíc). Ako H označme tie z nich, ktoré majú determinant $|A| = 1$. Dokážte, že H je invariantná podgrupa G. Vedeli by ste nájsť grupu izomorfnú s G/H?

Úloha 7. Overte, či H je normálna podgrupa grupy G a opíšte faktorovú grupu G/H (aké má triedy, vybrať z každej triedy práve jedného reprezentanta, zistiť, či je izomorfná s nejakou známou grupou).
a) $G = (\mathbb{R} \times \mathbb{R}, +)$, $H = \{(x, y); x + 2y = 0\}$
b) $G = (\mathbb{C}, +)$, $H = \mathbb{R}$
c) $G = (\mathbb{Z}, +)$, $H = 4\mathbb{Z} = \{4z; z \in \mathbb{Z}\}$
d) $G = (\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6, +)$, $H = [(2, 2)]$
e) $G = (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +)$, $H = \{(n, m, 0); n, m \in \mathbb{Z}\}$
f) $G = (\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$, $H = \{c \in \mathbb{C}; c^6 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$

Úloha 8. Zistite, či dané grupy sú izomorfné. V celom cvičení budeme ako S označovať grupu $(\{c \in \mathbb{C}; |c| = 1\}, \cdot)$ (prípadne množinu prvkov tejto grupy) a $C_n = (\{c \in \mathbb{C}; c^n = 1\}, \cdot)$
a) $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)/\{c \in \mathbb{C}; c^n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$, $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)/\mathbb{R}^+$ (pod $\mathbb{R}^+$ tu myslíme kladné reálne čísla, čiže $0 \notin \mathbb{R}^+$), S
b) $(\mathbb{R}, +)/\mathbb{Z}$, $S/\mathbb{C}_n$, S
c) $(C \setminus \{0\}, \cdot)$, $(C \setminus \{0\}, \cdot)/C_n$
d) $(\{c \in \mathbb{C}; c^n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}, \cdot)/\mathbb{R}^+$, C_n
e) $(\{c \in \mathbb{C}; c^n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}, \cdot)/C_n$, $\mathbb{R}^+$
f) C_{12}/C_4, $\mathbb{Z}_3$
g) $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3, +)/(\mathbb{Z}_2 \times \{0\})$, $\mathbb{Z}_3$
h) $S_3/[(123)]$, $(\mathbb{Z}_2, +)$

Úloha 9. Ukážte, že $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ (obe grupy berieme so sčitovaním) je nekonečná grupa, v ktorej má každý prvok konečný rád.

Úloha 10. Centrom grupy G nazývame množinu $Z(G) = \{g \in G; (\forall h \in G) gh = hg\}$ takých prvkov, ktoré komutujú so všetkými prvkami G. Ukážte, že $Z(G)$ je normálna podgrupa grupy G.

Úloha 11. Nech H je normálna podgrupa G, $\varphi\colon G \to G/H$ je kanonický homomorfizmus a $X \subset G$. Dokážte: Ak $\varphi[X]$ generuje G/H, tak $H \cup X$ generuje G.