Cvičenie 9 – Okruhy, ideály, faktorizácia

Na pripomenutie: Veta o izomorfizme platí pre okruhy v rovnakom znení ako pre grupy (iba normálne podgrupy sa nahradia ideálmi). T.j. ak $f\colon R_1 \to R_2$ je surjektívny okruhový homomorfizmus, tak $\operatorname{Ker} f$ je ideál a $R_1/\operatorname{Ker} f \cong \operatorname{Im} f$.
Ak R je komutatívny okruh s jednotkou a I je ideál v R, tak:

- R/I je pole práve vtedy, keď I je maximálny ideál.
- R/I je oborom integrity práve vtedy, keď I je vlastný prvoideál.
- Každý maximálny ideál je prvoideál.

Úloha 1. Nech F je pole a $A \neq \emptyset$. Nech Dokážte, že v okruhu F^A je každý ideál tvaru $M_p = \{f \in F^A; f(p) = 0\}$, kde p je nejaký prvok z A, maximálny. (Hint: Je faktorový okruh poľom?)

Úloha 2. Ak pre každé $n \in \mathbb{N}$ je I_n ideál v okruhu R a navyše platí $I_n \subseteq I_{n+1}$, tak aj zjednotenie $\bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$ je ideál v R.

Úloha 3. Okruh R sa volá boolovský okruh, ak pre každé $a \in R$ platí $a^2 = a$. Dokážte, že každý boolovský okruh je komutatívny. (Boolovským okruhom je napríklad okruh $(P(X), \triangle, \cap)$ z minulého cvičenia.)

Úloha 4. Nech R je komutatívny okruh s jednotkou. Dokážte, že v ňom platí binomická veta

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times a^k b^{n-k}.$$

Úloha 5. Nech R je ľubovoľný komutatívny okruh s jednotkou a $a \in R$. Potom množina $\{ax; x \in R\}$ je ideál v R, ktorý obsahuje prvok a. Tento ideál označujeme (a) a takéto ideály nazývame hlavné.

Úloha 6. Zistite, s akými okruhmi sú izomorfné okruhy $\mathbb{Z}_{60}/(15)$, $\mathbb{Z}_{60}/(20)$, $\mathbb{Z}_{60}/(12)$.

Úloha 7. Zistite, či dané ideály v okruhu $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi; a, b \in \mathbb{Z}\}$ (s obvyklým sčitovaním a násobením komplexných čísel) sú maximálne ideály/prvoideály.
a) $(1+i) = \{(1+i)z; z \in \mathbb{Z}[i]\}$
b) $(2) = \{2z; z \in \mathbb{Z}[i]\}$
c*) $(2+i) = \{(2+i)z; z \in \mathbb{Z}[i]\}$

Úloha 8. Ak I_1, I_2 sú ideály v okruhu $(R, +, \cdot)$, tak aj
a) $I_1 + I_2 = \{a + b; a \in I_1, b \in I_2\}$ je ideál v R.
b) $I_1.I_2 = \{a_1b_1 + \cdots + a_nb_n; n \in \mathbb{N}, a_i, b_i \in R\}$ je ideál v R.

Úloha 9. Nech $(G, *)$ je cyklická grupa, a je jej generátor, t.j. $G = [a]$. Ak definujeme operáciu $\cdot$ ako $a^k \cdot a^l = a^{k.l}$ (pre ľubovoľné $k, l \in \mathbb{Z}$), tak $(G, *, \cdot)$ je okruh. Viete povedať (v závislosti od rádu generátora a) s akým okruhom je tento okruh izomorfný?