

Domáca úloha č. 6

Zverejnená 22.3.2016 - odovzdáva sa najneskôr na cviku 6.4.2016.

Za úlohu máte odpovedať na otázky:

- a) Je G grupa?
- b) Je H je podgrupa G ?
- c) Je H je normálna podgrupa G ? Ak áno, tak ďalej zistite, či faktorová grupa G/H je izomorfná s grupou G' .

Svoje tvrdenia zdôvodnite! (Samozrejme v príkladoch, kde je jasné, že ide o grupu – napríklad $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$ alebo podobné číselné množiny – netreba uvádzať žiadne detailné zdôvodnenie, že to je grupa. V niektorých úlohách však nie je na prvý pohľad jasné, či ide o grupu, práve v tých ma zaujíma zdôvodnenie.)

1. a) $G = (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +)$, $H = \mathbb{Z} \times \{0\}$, $G' = (\mathbb{Z}, +)$;
b) $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}; a, b \in \mathbb{R}; a^2 + b^2 = 1 \right\}$ (s operáciou násobenia matíc),
 $H = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}; a, b \in \mathbb{R}; a^2 + b^2 = 1 \right\}$, $G' = (\mathbb{Z}_2, \oplus)$

2. a) $G = (\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$, $H = \mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R}; x > 0\}$, $G' = (\{x \in \mathbb{C}; |x| = 1\}, \cdot)$;
b) $G = \{A \in M_{2,2}(\mathbb{R}); |A| = \pm 1\}$ (s operáciou násobenia matíc); $H = \{A \in M_{2,2}(\mathbb{R}); |A| = 1\}$; $G' = (\mathbb{Z}_2, \oplus)$

3. a) $G = (\mathbb{R}, +)$, $H = \mathbb{Z}$, $G' = (\{x \in \mathbb{C}; |x| = 1\}, \cdot)$;
b) $G = \left\{ \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ \sin \varphi & -\cos \varphi \end{pmatrix}; \varphi \in \mathbb{R} \right\}$ (s operáciou násobenia matíc);
 $H = \left\{ \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}; \varphi \in \mathbb{R} \right\}$; $G' = (\mathbb{Z}_2, \oplus)$

4. a) $G = (\mathbb{R}^3, +)$, $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + 2y - z = 0\}$, $G' = (\mathbb{R}, +)$;
b) $G = \{A \in M_{2,2}(\mathbb{R}); |A| \neq 0\}$ (s operáciou násobenia matíc); $H = \{A \in M_{2,2}(\mathbb{R}); |A| > 0\}$; $G' = (\mathbb{Z}_2, \oplus)$

Rozdelenie – podľa priezviska: 1 riešia A-G, 2 riešia H-M, 3 riešia N-R, 4 riešia S-Z