Zadania prémiových úloh

1. Nech $\circ$ je asociatívna binárna operácia na množine G taká, že existuje prvok $e \in G$ taký, že

$$(\forall a \in G) e \circ a = a$$
$$(\forall a \in G)(\exists b \in G) b \circ a = e$$

   (Inými slovami, e je ľavý neutrálny prvok. Navyše pre každé a existuje prvok, ktorý by sme mohli nazvať „ľavý inverzný" vzhľadom na tento jeden konkrétny ľavý neutrálny prvok e.) Dokážte, že $(G, \circ)$ je grupa. Ukážte na príklade, že ak by sme podmienku $(\forall a \in G)(\exists b \in G) b \circ a = e$ nahradili podmienkou $(\forall a \in G)(\exists b \in G) a \circ b = e$, tak $(G, \circ)$ nemusí byť grupa.

2. Ak $*$ je asociatívna binárna operácia na G, tak hovoríme, že $(G, *)$ je pologrupa. Dokážte, že konečná pologrupa, v ktorej platia zákony o krátení, je grupa. Platí to aj pre nekonečné pologrupy? (Dokážte alebo nájdite kontrapríklad.)

3. Nech G je grupa. Pre podmnožiny $A, B \subseteq G$ označíme $AB = \{ab; a \in A, b \in B\}$.
   a) Nech A a B sú podgrupy G. Dokážte, že AB je podgrupa G práve vtedy, keď $AB = BA$.
   b) Nájdite príklad grupy G a jej podgrúp A a B takých, že AB nie je podgrupa G.
   c) Ak A, B sú konečné podgrupy G, tak $|AB|.|A \cap B| = |A|.|B|$.
   d) Nech A, B, C sú podgrupy také, že $A \subseteq C \subseteq AB$. Dokážte $C = (AB) \cap (AC) = A(B \cap C)$.

4. Dokážte, že grupa A_4 párnych permutácií 4-prvkovej množiny nemá žiadnu 6-prvkovú podgrupu. (Kontrapríklad ukazujúci, že neplatí obrátenie Lagrangeovej vety.)

5. Nech G je grupa.
   a) Pre normálnu podgrupu H definujme reláciu R ako $aRb \Leftrightarrow a^{-1}b \in H$. Dokážte, že táto relácia je kongruencia (definícia je v poznámkach k prednáške). Dokážte, že rozklad zodpovedajúci relácii R je práve rozklad G podľa podgrupy H.
   b) Dokážte, že ak R je kongruencia na G, tak $[e]_R$ je normálna podgrupa G. Navyše, rozklad určený reláciou ekvivalencie R je práve rozklad G podľa tejto podgrupy.
   c) Overte, že priradenia medzi normálnymi podgrupami G a kongruenciami na G z predchádzajúcich častí úlohy sú navzájom inverzné.

6. Nech G je grupa. Dva prvky x a y nazveme konjugované, ak existuje prvok $a \in G$ taký, že $y = axa^{-1}$. V tejto úlohe budeme označovať, že x a y sú konjugované, ako $x \sim y$.

a) Dokážte, že relácia $\sim$ (relácia konjugovanosti) je relácia ekvivalencie na množine G. Triedy tejto relácie ekvivalencie budeme volať triedy konjugácie.
b) Dokážte, že podgrupa grupy G je normálna práve vtedy, keď je zjednotením niektorých tried konjugácie.
c) Tvoria prvky, pre ktoré je trieda konjugácie jednoprvková, podgrupu grupy G? Je to normálna podgrupa?

7. Budeme pracovať v grupe $(S_n, \circ)$ všetkých permutácií množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$. Hovoríme, že permutácie φ, ψ majú rovnaký cyklový typ, ak obe sa dajú zapísať ako súčin disjunktných cyklov tak, že v oboch rozkladoch sú dĺžky cyklov presne rovnaké. T.j. vieme ich zapísať ako $\varphi = \sigma_1\sigma_2 \ldots \sigma_k$ a $\psi = \sigma'_1\sigma'_2 \ldots \sigma'_k$, kde σ_i aj σ'_i sú cykly a majú rovnakú dĺžku. (Napríklad (12)(345) a (14)(235) majú rovnaký cyklový typ.)
   Dokážte, že $\varphi, \psi \in S_n$ majú rovnaký cyklový typ práve vtedy, ak existuje permutácia $\tau \in S_n$ taká, že $\tau\varphi\tau^{-1} = \psi$. (V terminológie z predošlej úlohy to vieme povedať tak, že φ a ψ sú kongujované v grupe S_n.)

8. Nech $a, b \in G$, kde G je grupa. Ukážte, že ak $ba = a^4b^3$, tak prvky a^4b a a^2b^3 majú rovnaký rád.

9. a) Dokážte, že v okruhu $C(0,1)$ je každý ideál tvaru $M_p = \{f \in C(0,1); f(p) = 0\}$ pre $p \in \langle 0, 1\rangle$ maximálny.
   b) Dokážte, že všetky maximálne ideály v $C(0,1)$ majú takýto tvar.

10. Nech $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ a platí $f(a) = f(b) = f(c) = f(d) = 5$; a, b, c, d sú navzájom rôzne celé čísla. Prečo neexistuje $k \in \mathbb{Z}$ také, že $f(k) = 8$?

11. (Existencia transcendentných čísel.) Dokážte, že existuje aspoň jedno reálne číslo, ktoré nie je algebraické nad $\mathbb{Q}$.