

Definícia zobrazenia

1. Ak $A \neq \emptyset$, nájdite všetky zobrazenia $A \rightarrow \emptyset$ a $\emptyset \rightarrow A$. Existuje zobrazenie z \emptyset do \emptyset ?
2. Nech M, N sú konečné množiny, M má m prvkov a N má n prvkov. Koľko existuje zobrazení množiny M do množiny N ?
3. Nech M, N sú konečné množiny, M má m prvkov a N má n prvkov. Koľko existuje injekcií/bijekcií $M \rightarrow N$?
4. Nech A je konečná množina a $f: A \rightarrow A$ je zobrazenie. Dokážte:
 - a) Ak f je injekcia, tak f je bijekcia.
 - b) Ak f je surjekcia, tak f je bijekcia.

Skladanie zobrazení

1. Pre dané zobrazenia $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ nájdite $f \circ g$ a $g \circ f$. Rovnajú sa tieto zložené zobrazenia? Vedeli by ste načrtnúť grafy $f, g, g \circ f, f \circ g$?
 - a) $f(x) = x + 1, g(x) = x^2$;
 - b) $f(x) = \sin x, g(x) = x^2$;
 - c) $f(x) = |x|, g(x) = x^2$;
 - d) $f(x) = \sqrt{|x|}, g(x) = x^2$;
 - e) $f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{1+x} & \text{ak } x \geq 0, \\ \frac{1}{1-x} - 1 & \text{ak } x < 0. \end{cases}, g(x) = \begin{cases} 0 & \text{ak } x \notin (-1, 1), \\ \frac{1}{1-x} - 1 & \text{ak } x \in (-1, 1), x > 0, \\ 1 - \frac{1}{1+x} & \text{ak } x \in (-1, 1), x < 0 \end{cases}$
2. Pre dané zobrazenia $f, g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ nájdite $f \circ g$ a $g \circ f$. Rovnajú sa tieto zložené zobrazenia? ($\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ označuje množinu prirodzených čísel)
 - a) $f(n) = 2n, g(n) = \lceil n/2 \rceil$;
 - b) $f(n) = n + 1, g(n) = \begin{cases} n - 1 & \text{ak } n \geq 2, \\ 1 & \text{ak } n = 1. \end{cases}$

Injekcia, surjekcia, bijekcia

1. Dokážte: Ak $g \circ f$ je surjekcia, tak aj g je surjekcia. Platí aj opačná implikácia? Musí byť f surjekcia?
2. Dokážte: Ak $g \circ f$ je injekcia, tak f je injekcia.
3. Dokážte: Ak $g \circ f$ je bijekcia, tak f je injekcia a g je surjekcia.
4. Nech $f: X \rightarrow Y$ je zobrazenie a $X \neq \emptyset$ (t.j. X je neprázdna množina). Potom:
 - a) f je injekcia práve vtedy, keď existuje g také, že $g \circ f = id_X$.
 - b) f je surjekcia práve vtedy, keď existuje h také, že $f \circ h = id_Y$.
 - c) K zobrazeniu f existuje inverzné zobrazenie práve vtedy, keď f je bijekcia. (Tým sme znovu dokázali tvrdenie hovoriace, že zobrazenie je bijektívne práve vtedy, keď k nemu existuje inverzné zobrazenie.)
5. Nech $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow X, h: Y \rightarrow X$ sú zobrazenia. Ak g aj h sú inverzné zobrazenia k f , tak $g = h$.
6. Nech $f: X \rightarrow Y$ je surjekcia a $g, h: Y \rightarrow Z$ sú zobrazenia. Dokážte, že ak $g \circ f = h \circ f$, tak $g = h$.
7. Nech $f: Y \rightarrow Z$ je injekcia a $g, h: X \rightarrow Y$ sú zobrazenia. Dokážte, že ak $f \circ g = f \circ h$, tak $g = h$.
8. Dokážte: Zobrazenie $f: X \rightarrow Y$ je surjekcia práve vtedy, keď pre každú množinu Z a všetky zobrazenia $g, h: Y \rightarrow Z$ platí: Ak $g \circ f = h \circ f$, tak $g = h$.
9. Dokážte: Zobrazenie $f: X \rightarrow Y$ je injekcia práve vtedy, keď pre každú množinu Z a všetky zobrazenia $g, h: Z \rightarrow X$ platí: Ak $f \circ g = f \circ h$, tak $g = h$.

Inverzné zobrazenia

1. Nájdite príklad zobrazenia $f: X \rightarrow Y$, pre ktoré existuje ľavé inverzné zobrazenie, ale neexistuje pravé inverzné zobrazenie. T.j. existuje $g: Y \rightarrow X$ také, že $g \circ f = id_X$, ale neexistuje $h: Y \rightarrow X$ také, že $f \circ h = id_Y$.
2. Nájdite príklad zobrazenia $f: X \rightarrow Y$, pre ktoré existuje pravé inverzné zobrazenie, ale neexistuje ľavé inverzné zobrazenie. T.j. existuje $h: Y \rightarrow X$ také, že $f \circ h = id_Y$, ale neexistuje $g: Y \rightarrow X$ také, že $g \circ f = id_X$.

Vzor a obraz množiny*

K týmto úlohám sa na cvičení pravdepodobne *nestihneme* dostať, zatiaľ ich môžete ignorovať. (Ale ak vás zaujmú, môžete skúsiť niektoré z nich vyriešiť.)

1. Dokážte: Ak $A \subseteq B$, tak $f[A] \subseteq f[B]$.
2. Dokážte: $f[A \cup B] = f[A] \cup f[B]$, $f^{-1}[A \cup B] = f^{-1}[A] \cup f^{-1}[B]$.
3. Ktoré z nasledujúcich tvrdení platia a ktoré neplatia? Zdôvodnite.
 - a) $f[A \cap B] = f[A] \cap f[B]$
 - b) $f[A \cap B] \subset f[A] \cap f[B]$
 - c) $f[A \cap B] \supset f[A] \cap f[B]$
 - d) $f^{-1}[A \cap B] = f^{-1}[A] \cap f^{-1}[B]$
 - e) $f^{-1}[A \cap B] \subset f^{-1}[A] \cap f^{-1}[B]$
 - f) $f^{-1}[A \cap B] \supset f^{-1}[A] \cap f^{-1}[B]$
 - g) $f[f^{-1}[B]] = B$
 - h) $f[f^{-1}[B]] \subset B$
 - i) $f^{-1}[f[A]] = A$
 - j) $f^{-1}[f[A]] \subset A$
 - k) $g \circ f[A] = g[f[A]]$
4. Ak X je množina, tak $P(X)$ budeme označovať množinu všetkých jej podmnožín. Nech $f: X \rightarrow Y$ je zobrazenie a $g: P(X) \rightarrow P(Y)$ je zobrazenie definované tak, že $g(A) = f[A]$ pre ľubovoľnú podmnožinu $A \subseteq X$. Dokážte, že f je prosté práve vtedy, keď g je prosté.
5. Nech $f: X \rightarrow Y$ je zobrazenie. Dokážte, že f je injekcia práve vtedy, keď pre ľubovoľné dve podmnožiny $A, B \subseteq X$ platí $f[A \cap B] = f[A] \cap f[B]$.
6. Nech $f: X \rightarrow Y$ je zobrazenie. Dokážte, že f je injekcia \Leftrightarrow pre ľubovoľné dve podmnožiny $A, B \subseteq X$ platí $f[B \setminus A] = f[B] \setminus f[A]$.