Relácie ekvivalencie

1. Overte, či relácia R je relácia ekvivalencie na množine M.
   a) M je ľubovoľná množina, $R = M \times M$;
   b) M je ľubovoľná množina, $R = \{(x, x); x \in M\}$
   c) $M = \mathbb{R}$, $R = \{(x, y) \in M \times M; x - y \in \mathbb{Z}\}$;
   d) $M = \mathbb{Z}^2$, $R = \{((a, b), (c, d)) \in M \times M; a + d = b + c\}$;
   e) $M = \mathbb{N}^2$, $R = \{((a, b), (c, d)) \in M \times M; a + d = b + c\}$;
   f) $M = \mathbb{R}$, $R = \{(a, b) \in M \times M; |a - b| \leq 1\}$;
   g) $M = \mathbb{R}$, $R = \{(x, y) \in M \times M; x^2 = y^2\}$;
   h) $M = \mathcal{P}(\mathbb{N})$, t.j. M je množina všetkých podmnožín množiny $\mathbb{N}$ a $R = \{(A, B) \in M \times M; A \triangle B$ je konečná$\}$ (t.j. množiny A a B sú v relácii R, ak ich symetrický rozdiel $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ je konečná množina);
   i) $M = \mathcal{P}(\mathbb{N})$, $R = \{(A, B) \in M \times M;$ existuje bijekcia z A do $B\}$;
   j) $M = \mathbb{Z}$; $R = \{(x, y) \in M \times M; 3 \mid x + 2y\}$;
   k) $M = \mathbb{R}$, $R = \{(x, y) \in M \times M; x - y \in \mathbb{Q}\}$;
   l) $M = \mathbb{R}^2$; $R = \{((x_1, x_2), (y_1, y_2) \in M \times M; x_1 = y_1)\}$;
   m) $M = \mathbb{R}^2$; $R = \{((x_1, x_2), (y_1, y_2) \in M \times M; x_1 = y_1 \wedge x_2 = y_2)\}$;
   n) $M = \mathbb{R}^2$; $R = \{((x_1, x_2), (y_1, y_2) \in M \times M; x_1 = y_2 \wedge x_2 = y_1)\}$;
   o) $M = \{f \colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}\}$, t.j. M je množina všetkých zobrazení zo $\mathbb{Z}$ do $\mathbb{Z}$; $R = \{(f, g) \in M \times M; f(1) = g(1)\}$;
   p) $M = \{f \colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}\}$, t.j. M je množina všetkých zobrazení zo $\mathbb{Z}$ do $\mathbb{Z}$; $R = \{(f, g) \in M \times M; f(1) = g(0)\}$;
   q) $M = G$, kde $(G, \circ)$ je grupa, H je podgrupa grupy G a $R = \{(x, y) \in M \times M; xy^{-1} \in H\}$. Sú niektoré relácii uvedených v ostatných častiach špeciálne prípady tejto relácie?
   r) M je ľubovoľná množina, $f \colon M \to S$ je ľubovoľné zobrazenie a $R = \{(x, y) \in M \times M; f(x) = f(y)\}$. (=LAG1, 1.6.12(1)) Sú niektoré relácii uvedených v ostatných častiach špeciálne prípady tejto relácie?
2. Koľko existuje relácií ekvivalencie na trojprvkovej množine $\{0, 1, 2\}$?
3. Dokážte: Ak R_1 a R_2 sú relácie ekvivalencie na tej istej množine M, tak aj $R = R_1 \cap R_2$ je relácia ekvivalencie na M. (Všimnite si, že $(a, b) \in R \Leftrightarrow (a, b) \in R_1 \wedge (a, b) \in R_2$.)

Faktorové grupy

1. Ukážte, že faktorová grupa G/H je izomorfná s grupou K. (Aspoň jednu úlohu skúste vyriešiť priamo pomocou definície faktorovej grupy a aspoň jednu úlohu pomocou vety o faktorovom izomorfizme.)
   a) $G = (\mathbb{R} \times \mathbb{R}, +)$, $H = \{(x, y); x + 2y = 0\}$, $K = (\mathbb{R}, +)$;
   b) $G = (\mathbb{R} \times \mathbb{R}, +)$, $H = \{(x, 3x); x \in \mathbb{R}\}$, $K = (\mathbb{R}, +)$;
   c) $G = (\mathbb{C}, +)$, $H = \mathbb{R}$, $K = (\mathbb{R}, +)$;
   d) $G = (\mathbb{Z}_8, +)$, $H = 2\mathbb{Z}_4 = \{0, 2, 4, 6\}$, $K = (\mathbb{Z}_2, +)$;
   e) $G = (\mathbb{Z}_8, +)$, $H = 4\mathbb{Z}_2 = \{0, 4\}$, $K = (\mathbb{Z}_4, +)$;
   f) $G = (\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$, $H = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $K = \{c \in \mathbb{C}; |c| = 1\}$;
   g) $G = (\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$, $H = \mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R}; x > 0\}$, $K = \{c \in \mathbb{C}; |c| = 1\}$;
   h) $G = (\mathbb{Z}, +)$, $H = 4\mathbb{Z} = \{4z; z \in \mathbb{Z}\}$, $K = \mathbb{Z}_4$;
   i) $G = (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$, $H = \mathbb{R}^+$, $K = (\mathbb{Z}_2, +)$;
   j) $G = (\mathbb{R}^*, \cdot)$, $H = \{\pm 1\}$, $K = (\mathbb{R}^+, \cdot)$
2. Zistite, či dané grupy sú izomorfné. V celom cvičení budeme ako S označovať grupu $(\{c \in \mathbb{C}; |c| = 1\}, \cdot)$ (prípadne množinu prvkov tejto grupy) a $C_n = (\{c \in \mathbb{C}; c^n = 1\}, \cdot)$
   a) $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)/\{c \in \mathbb{C}; c^n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$, $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)/\mathbb{R}^+$ (pod $\mathbb{R}^+$ tu myslíme kladné reálne čísla, čiže $0 \notin \mathbb{R}^+$), S

b) $(\mathbb{R}, +)/\mathbb{Z}$, S/C_n, S
c) $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$, $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)/C_n$
d) $(\{c \in \mathbb{C}; c^n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}, \cdot)/\mathbb{R}^+$, C_n
e) $(\{c \in \mathbb{C}; c^n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}, \cdot)/C_n$, $\mathbb{R}^+$
f) C_{12}/C_4, $\mathbb{Z}_3$
g) $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3, +)/(\mathbb{Z}_2 \times \{0\})$, $\mathbb{Z}_3$