Lineárna závislosť a nezávislosť

1. Overte, že $\mathbb{R}$ je vektorový priestor nad poľom $\mathbb{Q}$. Dokážte, že v tomto priestore sú 1, $\sqrt{2}$ a $\sqrt{3}$ lineárne nezávislé.
2. Ukážte, že vo vektorovom priestore $\mathbb{R}$ nad $\mathbb{Q}$ (z predošlej úlohy) sú lineárne nezávislé vektory $1+3\sqrt{2}$ a $2-\sqrt{2}$.
3. Sú 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{6}$ lineárne nezávislé vo vektorovom priestore $\mathbb{R}$ nad poľom $\mathbb{Q}$? (Hint: Úlohu môže o niečo zjednodušiť, ak sa pozriete na 1 a $\sqrt{3}$ ako prvky priestoru $\mathbb{R}$ nad poľom $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a+b\sqrt{3}; a,b \in \mathbb{Q}\}$.)

Báza a dimenzia

1. Zistite, či dané vektory tvoria bázu v $\mathbb{R}^3$:
   a) (1,2,3), (1,-2,3), (1,2,-3)
   b) (1,1,1), (1,1,0), (1,0,1)
   c) (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), (1,1,1).
2. Zistite, či dané vektory tvoria bázu v $\mathbb{Z}_5^3$:
   a) (1,2,3), (2,3,4), (0,3,1)
   b) (1,0,0), (0,1,2), (2,1,3)
   c) (0,1,2), (3,0,1), (1,0,2).
3. P_n označme priestor všetkých polynómov stupňa najviac n. Overte, že $d(P_n) = n+1$ a že $1, x-1, \dots (x-1)^n$ je báza tohoto priestoru.
4. Určte dimenziu podpriestoru $[\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}]$, ak $\vec{\alpha} = (1,3,2,1)$, $\vec{\beta} = (4,9,5,4)$ a $\vec{\gamma} = (3,7,4,3)$ v $\mathbb{R}^4$.
5. Nájdite bázu a dimenziu podpriestoru $P = [(1,1,1,3), (1,2,3,6), (1,6,6,6), (3,1,4,1)]$ priestoru $\mathbb{Z}_7^3$.
6. Ak sa to dá, doplňte dané vektory na bázu príslušného vektorového priestoru:
   a) (1,1,2), (2,1,3) v $\mathbb{R}^3$,
   b) x^2-1, x^2+1 v priestore polynómov stupňa najviac 3,
   c) (1,2,3,0), (3,4,1,2) v $\mathbb{Z}_5^4$.
7. Ak každý z vektorov $\vec{\beta}_1, \dots, \vec{\beta}_k$ je lineárnou kombináciou vektorov $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_m$, tak $d([\vec{\beta}_1, \dots, \vec{\beta}_k]) \le d([\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_m])$.

Súčty podpriestorov

1. Zistite[1] $d(U)$, $d(V)$, $d(U+V)$, $d(U \cap V)$, bázu $U+V$ a bázu $U \cap V$
   a) v $\mathbb{R}^2$ pre $U = [(2,5)]$, $V = [(1,3)]$
   b) v $\mathbb{R}^3$ pre $U = [(1,2,3), (-1,2,3)]$, $V = [(2,1,4), (-2,1,4)]$
   c) v $\mathbb{R}^4$ pre $U = [(1,0,1,0), (1,0,0,1)]$, $V = [(1,1,1,0), (1,0,1,1)]$
   d) v $\mathbb{R}^4$ pre $U = [(1,2,3,4), (1,1,1,1), (4,3,2,1)]$, $V = [(1,1,0,0), (0,0,1,1), (1,0,0,0)]$.
   [a)1,1,2,0; b)2,2,3,1; c)2,2,3,1; d)2,3,4,1]
2. Nech $T = [(1,3,2), (2,1,3), (3,4,0)]$ je podpriestor $(\mathbb{Z}_5)^3$. Existuje podpriestor S taký, že $(\mathbb{Z}_5)^3 = T \oplus S$? Ak áno, nájdite ho! Je tento podpriestor jednoznačne určený?
3. Dokážte, že ak $\vec{e_1}, \dots, \vec{e_k}$ je báza vektorového priestoru V, tak $V = [\vec{e_1}] \oplus \dots \oplus [\vec{e_k}]$.

[1] Pri tejto úlohe sa môže hodiť používať elementárne riadkové operácie a úpravu na redukovaný stupňovitý tvar.