Lineárne zobrazenia

1. Nech V a W sú vektorové priestory nad poľom F a $f\colon V \to W$ je lineárne zobrazenie. Ak $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n$ sú lineárne závislé vektory, tak aj $f(\vec{\alpha}_1), \dots, f(\vec{\alpha}_n)$ sú lineárne závislé vektory.
2. Nech $f\colon V \to W$ je lineárne zobrazenie z vektorového priestoru V do vektorového priestoru W nad poľom F. Dokážte:
   Ak S je podpriestor vektorového priestoru V, tak $f[S] = \{f(\vec{\alpha}); \vec{\alpha} \in S\}$ je podpriestor vektorového priestoru W.
   Ak T je podpriestor vektorového priestoru W, tak $f^{-1}[T] = \{\vec{\alpha} \in V : f(\vec{\alpha}) \in T\}$ je podpriestor vektorového priestoru V.

Súčin matíc

1. Vypočítajte $A^2 + 2AB + B^2$, $A^2 + 2BA + B^2$, $A^2 + AB + BA + B^2$, $(A+B)^2$, ak $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ $B = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{smallmatrix}\right)$
2. Pre štvorcovú maticu C typu $n \times n$ budeme výraz $\mathrm{Tr}(C) = \sum_{k=1}^{n} c_{nn}$ nazývať *stopa matice* C.
   Ukážte, že ak A, B sú matice typu $n \times n$ nad poľom F, tak platia rovnosti $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(A)^T$ a $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.
   Zistite, či pre ľubovoľné matice A, B, C typu $n \times n$ platia vzťahy $\mathrm{Tr}(ABC) = \mathrm{Tr}(CBA)$ a $\mathrm{Tr}(ABC) = \mathrm{Tr}(ACB)$. (Svoje tvrdenie zdôvodnite!) Ak niektorý z týchto vzťahov neplatí, bude platiť za dodatočného predpokladu, matica A je symetrická?
3. Nech $C = AB$, kde A, B sú matice. Musí potom platiť $V_C \subseteq V_A$? Musí platiť $S_C \subseteq S_B$? Musí platiť $S_A \subseteq S_C$, $S_B \subseteq S_C$? (Pripomeňme, že S_A je podpriestor generovaný riadkami matice A.)
4. Nech A, B sú matice nad poľom F typu $m \times n$ resp. $n \times k$. Dokážte, že $h(AB) \leq h(A)$. Dokážte, že ak $n = k$ a B je regulárna, tak $h(AB) = h(A)$.
5. Nech A, B sú matice nad poľom F typu $m \times n$ resp. $n \times k$. Dokážte, že $h(AB) \leq h(B)$. Dokážte, že ak $m = n$ a A je regulárna, tak $h(AB) = h(B)$.

Matica zobrazenia

1. Nájdite maticu lineárneho zobrazenia $f\colon (\mathbb{Z}_7)^2 \to (\mathbb{Z}_7)^2$ a napíšte jeho predpis.
   a) $f(1,1) = (0,1)$, $f(6,1) = (3,2)$
   b) $f(2,3) = (1,0)$, $f(3,2) = (6,1)$
2. Nájdite maticu lineárneho zobrazenia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, pre ktoré platí:
   a) $f(2,0,3) = (1,2,-1,1)$, $f(4,1,5) = (4,5,-2,1)$, $f(3,1,2) = (1,-1,1,-1)$,
   b) $f(2,0,3) = (1,2,-1,1)$, $f(4,1,5) = (4,5,-2,1)$, $f(2,-1,4) = (-1,1,-1,2)$,
   c) $f(2,0,3) = (1,2,-1,1)$, $f(4,1,5) = (4,5,-2,1)$, $f(2,-1,4) = (1,-1,1,-1)$.
3. Nájdite maticu lineárneho zobrazenia $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ takého, že:
   a) $f(1,2,3,3) = (0,0,0,0)$, $f(1,1,3,2) = (1,0,3,1)$, $f(1,1,2,0) = (2,0,1,0)$, $f(1,0,3,1) = (2,1,3,1)$
   b) $f(1,2,3,4) = (-1,-1,4,1)$, $f(1,1,3,2) = (1,0,3,1)$, $f(1,1,2,0) = (2,0,1,0)$, $f(1,0,3,1) = (2,1,3,1)$
   c) $f(0,1,1,1) = (1,0,0,0)$, $f(1,0,1,1) = (0,1,0,0)$, $f(1,1,0,1) = (0,0,1,0)$, $f(1,1,1,0) = (0,0,0,1)$
4. Koľko existuje lineárnych zobrazení spĺňajúcich zadané podmienky? Koľko z nich je injektívnych? Koľko je surjektívnych?
   a) $f\colon \mathbb{Z}_5^3 \to \mathbb{Z}_5^4$, $f(1,3,1) = (1,1,1,3)$, $f(2,1,3) = (0,1,3,4)$, $f(2,1,0) = (1,4,0,0)$;
   b) $f\colon \mathbb{Z}_5^4 \to \mathbb{Z}_5^3$, $f(1,0,3,1) = (0,1,3)$, $f(2,1,3,1) = (1,1,3)$, $f(1,1,4,1) = (2,2,1)$;

c) $f\colon \mathbb{Z}_5^4 \to \mathbb{Z}_5^3$, $f(1,0,3,1) = (0,1,3)$, $f(2,1,3,1) = (1,1,3)$, $f(1,1,0,0) = (1,0,0)$;

Jadro a obraz

1. Nájdite bázu obrazu a bázu jadra lineárneho zobrazenia $f\colon (\mathbb{Z}_5)^4 \to (\mathbb{Z}_5)^4$ s danou maticou. V ktorých prípadoch je toto zobrazenie surjektívne a v ktorých injektívne?
$\begin{pmatrix} 3&1&2&2\\ 4&3&2&1\\ 0&1&2&4\\ 2&0&1&2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2&4&1&1\\ 3&3&3&2\\ 1&4&2&1\\ 4&2&0&3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1&2&3&4\\ 2&3&1&4\\ 4&3&2&1\\ 3&4&1&2 \end{pmatrix}$
2. Nájdite bázu a dimenziu $\operatorname{Ker} f$ aj $\operatorname{Im} f$ pre dané lineárne zobrazenie. Rozhodnite, či toto zobrazenie je injektívne, surjektívne, bijektívne.
a) $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1+x_2+x_3+x_4, 2x_2+x_3+x_4, 4x_2+2x_3+2x_4)$.
b) $f\colon M_{2,2}(\mathbb{R}) \to M_{2,2}(\mathbb{R})$, $f\colon \begin{pmatrix} a&b\\ c&d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a+b & b+c\\ c+d & d+a \end{pmatrix}$
c) $f\colon V \to V$, kde $V = \{ax^2+bx+c; a,b,c \in \mathbb{R}\}$ je podpriestor $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ a $f\colon p(x) \mapsto p'(x)$. (T.j. f priradí polynómu $p(x)$ jeho deriváciu.)
3. Definujme lineárne zobrazenie $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ ako $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = (3x_1+x_2+2x_3-x_4, 2x_1+4x_2+x_3-x_4)$ a označme $U_1 = \operatorname{Ker} f$.
Ďalej definujme lineárne zobrazenie $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ ako $g(y_1,y_2) = (y_1-y_2, y_1-3y_2, 2y_1-8y_2, 3y_1-27y_2)$ a označme $U_2 = \operatorname{Im} g$.
Vidíme, že U_1 aj U_2 sú podpriestory $\mathbb{R}^4$.
Nájdite bázy priestorov U_1, U_2, $U_1 \cap U_2$ a $U_1 + U_2$.
4. Nech $f\colon V \to V$ je lineárne zobrazenie. Ako f^2 budeme označovať $f \circ f$. Dokážte
   (a) $\operatorname{Ker} f^2 \supseteq \operatorname{Ker} f$,
   (b) $\operatorname{Im} f^2 \subseteq \operatorname{Im} f$,
   (c) $f^2 = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Ker} f \supseteq \operatorname{Im} f$.

Inverzná matica

1. Nájdite inverznú maticu k daným maticiam nad R:
$\begin{pmatrix} 2&3&1\\ 4&3&3\\ 1&2&1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1&3&1\\ 2&4&3\\ 3&1&2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0&3&1\\ 2&0&3\\ 1&1&2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3&0&1\\ 0&3&2\\ 1&0&1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1&0&1\\ 0&1&1\\ 2&-1&3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3&2&1\\ 4&2&1\\ 1&0&1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1&\sqrt{2}&\sqrt{6}\\ 0&1&\sqrt{3}\\ 0&0&1 \end{pmatrix}$ Výsledky:
$\begin{pmatrix} \frac{3}{4}&\frac{1}{4}&-\frac{3}{2}\\ \frac{1}{4}&-\frac{1}{4}&\frac{1}{2}\\ -\frac{5}{4}&\frac{1}{4}&\frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}&-\frac{1}{10}&-\frac{1}{10}\\ -1&\frac{4}{5}&-\frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3&5&-9\\ 1&1&-2\\ -2&-3&6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}&0&-\frac{1}{2}\\ \frac{1}{3}&\frac{1}{3}&-1\\ -\frac{1}{2}&0&\frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\ 1&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\ -1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1&1&0\\ \frac{3}{2}&-1&-\frac{1}{2}\\ 1&-1&-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1&-\sqrt{2}&0\\ 0&1&-\sqrt{3}\\ 0&0&1 \end{pmatrix}$
2. Nech $f\colon (\mathbb{Z}_5)^4 \to (\mathbb{Z}_5)^4$ je lineárne zobrazenie také, že $f(1,2,3,1) = (2,0,1,0)$, $f(0,2,3,1) = (1,2,0,3)$, $f(1,0,3,4) = (3,2,1,0)$, $f(4,1,3,2) = (2,3,1,1)$. Nájdite maticu zobrazenia f^{-1}.
3. Zistite, či $\begin{pmatrix} 1&1&0\\ 1&0&1\\ 0&1&1 \end{pmatrix}$ je regulárna a) nad $\mathbb{Z}_2$ b) nad $\mathbb{Z}_3$, ak áno, nájdite inverznú.

4*. Vypočítajte $A^{-1}B$ a $B^{-1}A$. Skúste to urobiť bez výpočtu A^{-1} resp. B^{-1}.
$A = \begin{pmatrix} 0&3&1\\ 2&0&3\\ 1&1&2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1&2&1\\ 0&1&-1\\ 0&-1&2 \end{pmatrix}$
Ako skúšku správnosti môžete vyskúšať, či po vynásobení výsledku zľava maticou A (resp. B) dostanete maticu B (resp. A).