Bonusové úlohy

Odovzdávajú sa písomne. Za správne vyriešenú úlohu je 1 bod. Spolu sa dá získať z týchto úloh maximálne 5 bodov.

1. Nech G je neprázdna množina a $\circ$ je asociatívna binárna operácia na G. Potom G je grupa práve vtedy, keď pre ľubovoľné $a, b \in G$ majú rovnice
$$a \circ x = b$$
$$y \circ a = b$$
riešenie v G (inými slovami, pre ľubovoľné $a, b \in G$ existujú $x, y \in G$, ktoré spĺňajú tieto dve rovnosti.)
2. Nech G je konečná množina a $\circ$ je binárna operácia na G taká, že platí asociatívny zákon a zákony o krátení. Dokážte, že G je grupa.
3. Nech $*$ je binárna operácia na množine G, ktorá je
a) asociatívna,
b) má ľavý neutrálny prvok t.j. existuje prvok $e \in G$ taký, že $(\forall x \in G) e * x = x$
c) pre každý prvok $x \in G$ existuje $y \in G$ také, že $x * y = e$ (kde e označuje prvok z časti b) t.j.
$$(\forall x \in G)(\exists y \in G) y * x = e$$
(stručne môžeme povedať, že ku každému prvku existuje ľavý inverzný prvok vzhľadom na e).
Dokážte, že potom $(G, *)$ je grupa.
4. Dokážte, že 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{6}$ sú lineárne nezávislé vo vektorovom priestore $\mathbb{R}$ nad poľom $\mathbb{Q}$.
5. Nech $u \in \mathbb{C}$ je také číslo, že existuje nenulový polynóm $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, $a_n \neq 0$, taký, že $P(u) = 0$. Dokážte, že potom množina $\mathbb{Q}[u] = \{b_k u^k + \cdots + b_1 u + b_0; k \in \mathbb{N}, b_i \in \mathbb{Q}\}$ je pole. (Hint: Môže pomôcť uvedomiť si, že $\mathbb{Q}[u]$ je konečnorozmerný vektorový priestor nad $\mathbb{Q}$. Na to je užitočné vedieť, je to, že polynómy sa dajú deliť so zvyškom. To by vám mohlo pomôcť vyjadriť každý prvok z $\mathbb{Q}[u]$ ako polynomický výraz od u stupňa najviac $(n-1)$.)
6. LAG1, 1.5.17(8*): Dokážte, že pre krátku exaktnú postupnosť homomorfizmov *abelovských* grúp
$$0 \xrightarrow{0} A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{0} 0$$
jestvuje homomorfizmus $s \colon B \to A$ taký, že $s \circ f = id_A$ práve vtedy, keď jestvuje homomorifzmu $t \colon C \to B$ taký, že $g \circ t = id_C$. (Ak je splnená hociktorá z týchto dvoch podmienok, hovoríme, že daná krátka exaktná postupnosť je *rozštiepená* homomorfizmom s resp. t.)[1]
7. LAG1, 1.5.17(9*): Nech $G_1 \xrightarrow{g_1} G_2 \xrightarrow{g_2} G_3 \xrightarrow{g_3} G_4 \xrightarrow{g_4} G_5$ a $H_1 \xrightarrow{h_1} H_2 \xrightarrow{h_2} H_3 \xrightarrow{h_3} H_4 \xrightarrow{h_4} H_5$ sú exaktné postupnosti homomorfizmov abelovských grúp a nech existujú homomorfizmy $v_i \colon G_i \to H_i$, kde $i = 1, 2, 3, 4, 5$, také, že je splnená podmienka $v_{i+1} \circ g_i = h_i \circ v_i$ pre $i = 1, 2, 3, 4$. (Posledná podmienka sa vyjadruje tak, že diagram
$$\begin{tikzcd}
G_1 \arrow[r, "g_1"] \arrow[d, "v_1"'] & G_2 \arrow[r, "g_2"] \arrow[d, "v_2"'] & G_3 \arrow[r, "g_3"] \arrow[d, "v_3"'] & G_4 \arrow[r, "g_4"] \arrow[d, "v_4"'] & G_5 \arrow[d, "v_5"'] \\
H_1 \arrow[r, "h_1"] & H_2 \arrow[r, "h_2"] & H_3 \arrow[r, "h_3"] & H_4 \arrow[r, "h_4"] & H_5
\end{tikzcd}$$

[1] Nejaké základné veci o exaktných postupnostiach, vrátane definícií, sú zhrnuté nižšie.

komutuje.) Dokážte nasledujúce tvrdenie – vraví sa mu *lema o piatich izomorfizmoch*: Ak v_1, v_2, v_4, v_5 sú izomorfizmy, tak aj v_3 je izomorfizmus.

8. Nech $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je funkcia taká, že
$$(\forall x, y \in \mathbb{R}) f(x+y) = f(x) + f(y).$$
Takéto funkcie sa nazývajú *aditívne funkcie.* Hovoríme tiež, že tieto funkcie spĺňajú *Cauchyho funkcionálnu rovnicu.*
a) Ukážte, že pre každé $r \in \mathbb{Q}$ a $x \in \mathbb{R}$ platí $f(rx) = rf(x)$.
b) Ukážte, že ak je funkcia f navyše spojitá, tak existuje konštanta C taká, že pre každé $x \in \mathbb{R}$ platí $f(x) = Cx$. (Teda je to lineárna funkcia).
c) Ukážte, že existujú aj nespojité riešenia Cauchyho funkcionálnej rovnice. (Návod: Pozrite sa na $\mathbb{R}$ ako na vektorový priestor nad $\mathbb{Q}$. Využite, čo viete o jeho báze.)[2]
9. Ukážte, že dimenzia vektorového priestoru $\mathbb{R}$ nad poľom $\mathbb{Q}$ je nespočítateľná. [3]
10. Ukážte, že dimenzia priestoru $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ všetkých reálnych postupností je $\mathfrak{c}$. (Táto úloha sa dá ekvivalentne sformulovať ako: Ukážte, že v $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ existuje lineárne nezávislá množina kardinality $\mathfrak{c}$.) [4]

1 Exaktné postupnosti

Pretože medzi prémiami sú dve úlohy týkajúce sa exaktných postupností, napíšem tu o nich pár vecí. (Ale väčšinu z toho, čo tu napíšem, môžete nájsť aj v LAG1 v častiach 1.5.17 a a 4.1.17.)

V LAG1 sa spomínajú exaktné postupnosti komutatívnych grúp a vektorových priestorov. Exaktné postupnosti existujú aj pre mnohé ďalšie objekty. (Všeobecne sa dá povedať, že tento pojem sa dá definovať a bude mať podobné vlastnosti v ľubovoľnej abelovskej kategórii. Prinajmenšom s niektorými špeciálnymi prípadmi sa máte šancu stretnúť, ak sa vaše záujmy budú uberať k algebraickej topológii, homologickej algebre a iným príbuzným oblastiam.)

Ak sa vám z nejakého dôvodu ľahšie dokazujú analogické tvrdenia pre vektorové priestory, môžete odovzdať ako prémiu riešenie úlohy pre vektorové priestory. (Náročnosť dôkazu pre abelovské grupy a pre vektorové priestory je podľa mojej mienky zhruba rovnaká.)

Definícia 1.1. Dvojica homomorfizmov $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ medzi abelovskými grupami A, B, C sa nazýva *exaktná,* ak $\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} g$.

Konečnú postupnosť homomorfizmov
$$G_0 \xrightarrow{g_0} G_1 \xrightarrow{g_1} G_2 \xrightarrow{g_2} \ldots \longrightarrow G_{n-1} \xrightarrow{g_{n-1}} G_n$$
nazveme *exaktnou,* ak každá dvojica po sebe nasledujúcich homomorfizmov g_i, g_{i+1} je exaktná.

Všimnite si, že ak f a g tvoria exaktnú dvojicu, tak $g \circ f = 0$.

Pomerne ľahko sa dá dokázať, že

- Postupnosť $A \xrightarrow{g} B \longrightarrow 0$ je exaktná práve vtedy, keď g je epimorfizmus.
- Postupnosť $0 \longrightarrow A \xrightarrow{g} B$ je exaktná práve vtedy, keď f je monomorfizmus.

[2] V tejto úlohe môžete bez dôkazu využívať všetky tvrdenia uvedené v časti 2 o Hamelovej báze.

[3] V tejto úlohe môžete bez dôkazu využívať všetky tvrdenia uvedené v časti 2 o Hamelovej báze. Takisto sa vám hodia niektoré základné veci o kardinalite – tie by ste sa mali dozvedieť do konca semestra na Diskrétnej matematike 1.

[4] V tejto úlohe môžete bez dôkazu využívať všetky tvrdenia uvedené v časti 2 o Hamelovej báze. Takisto sa vám hodia niektoré základné veci o kardinalite – tie by ste sa mali dozvedieť do konca semestra na Diskrétnej matematike 1.

- Postupnosť $0 \longrightarrow A \xrightarrow{g} B \longrightarrow 0$ je exaktná práve vtedy, keď f je izomorfizmus.
- Ak postupnosť $0 \xrightarrow{0} A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{0} 0$ je exaktná, tak g je epimorfizmus a f je monomorfizmus. (Takáto exaktná postupnosť sa nazýva *krátka exaktná postupnosť.*)

Ukážme si jeden príklad rozštiepenej exaktnej postupnosti (t.j. takej, o akej je úloha 6).

Príklad 1.2. Nech $(A,*)$ a $(C,*)$ sú komutatívne grupy, neutrálny prvok označme v oboch prípadoch ako 0. Na množine $A \times C$ definujeme grupu tak, že operáciu definujeme po súradniciach, t.j.

$$(a_1, c_1) * (a_2, c_2) = (a_1 * c_1, a_2 * c_2).$$

Takto dostaneme skutočne grupu a zobrazenia

$$\begin{aligned} e_A &\colon A \to C & e_A(a) &= (a, 0) \\ e_B &\colon B \to C & e_B(b) &= (0, b) \\ p_A &\colon C \to A & p_A(a, b) &= a \\ p_B &\colon C \to B & p_B(a, b) &= b \end{aligned}$$

sú homomorfizmy.

Platí $\operatorname{Im} e_A = A \times \{0\} = \operatorname{Ker} p_B$, teda

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{e_A} C \xrightarrow{p_B} B \longrightarrow 0$$

je krátka exaktná postupnosť.

Súčasne platí $p_A \circ e_A = id_A$. Teda ide o rozštiepenú krátku exaktnú postupnosť.

To isté platí pre

$$0 \longrightarrow B \xrightarrow{e_B} C \xrightarrow{p_A} A \longrightarrow 0$$

Azda sa oplatí spomenúť, že C sa v tomto kontexte označuje častejšie $A \oplus B$ ako $A \times B$.

A tiež to, že dokonca platí, že každá rozštiepená krátka exaktná postupnosť vyzerá „v podstate takto," t.j. ak

$$0 \xrightarrow{0} A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{0} 0$$

je takáto postupnosť, tak C je izomorfné s $A \oplus B$ a tento izomorfizmus „prenesie" e_A na f a p_B na g.

2 Hamelova báza

S pojmami ako báza a dimenzia sme sa zaoberali iba v konečnorozmerných priestoroch. Dajú sa však definovať pre ľubovoľné vektorové priestory.

Definícia 2.1. Nech V je vektorový priestor nad poľom $\mathbb{R}$.

Podmnožina $B \subseteq V$ sa nazýva *lineárne nezávislá,* ak pre ľubovoľné vektory $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n \in B$ platí

$$(\forall c_1 \dots c_n \in F) c_1\vec{b}_1 + \dots + c_n\vec{b}_n = \vec{0} \Rightarrow c_1 = \dots = c_n = 0.$$

Lineárny obal množiny B je

$$[B] = \{c_1\vec{b}_1 + \dots + c_n\vec{b}_n; n \in \mathbb{N}, c_1, \dots, c_n \in F, b_1, \dots, b_n \in B\}.$$

Báza priestoru V je taká lineárne nezávislá podmnožina $B \subseteq V$, pre ktorú platí $[B] = V$.

Teda podobne ako v konečnorozmernom prípade sme bázu definovali ako lineárne nezávislú generujúcu množinu. Lineárnu nezávislosť nekonečnej podmnožiny sme definovali pomocou lineárnej nezávislosti jej konečných podmnožín. Podobne pri lineárnom obale sme využívali lineárne kombinácie konečne veľa prvkov z B. (Vlastne nekonečnú lineárnu kombináciu nevieme ani zmysluplne zadefinovať.)

Často sa takáto báza nazýva aj *Hamelova báza.* (Najmä na odlíšenie od niektorých iných typov báz, ktoré sa vyskytujú v nekonečnorozmerných priestoroch. Na funkcionálnej analýze sa stretneme s ortonormálnou bázou Hilbertovho priestoru; možno niekde budete počuť aj niečo o Schauderovej báze.)

Príklad 2.2. Zoberme si azda najjednoduchší príklad nekonečnorozmerného priestoru. Ako c_{00} označme množinu tých postupností reálnych čísel, ktoré sú od istého miesta nulové. Potom postupnosti tvaru

$$e^{(i)} = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_{i\text{-ta pozícia}}, 0, 0, \dots)$$

tvoria bázu tohoto priestoru. (Dá sa ľahko skontrolovať, že každú postupnosť z c_{00} dostanem ako ich lineárnu kombináciu a aj to, že sú lineárne nezávislé.)

Prvá otázka, ktorú si musíme položiť, je to, či v každom vektorovom priestore existuje báza. Takéto tvrdenie platí.

Veta 2.3. *Nech V je vektorový priestor nad nejakým poľom F. Pre každú lineárne nezávislú množinu $A \subseteq V$ existuje báza priestoru V taká, že $B \subseteq A$.*

Dôsledok 2.4. *Každý vektorový priestor má bázu.*

Ďalšia prirodzená otázka je, či ľubovoľné dve bázy majú rovnako veľa prvkov. Aj toto je pravda.

Veta 2.5. *Ak B_1 a B_2 sú bázy toho istého vektorového priestoru, tak B_1 a B_2 majú rovnakú kardinalitu, t.j. $|B_1| = |B_2|$.*

Kardinalitu ľubovoľnej bázy priestoru V nazývame dimenzia *priestoru V. (Alebo tiež* Hamelova dimenzia *priestoru V)*

Príklad 2.6. Napríklad dimenzia priestoru c_{00} je $\aleph_0$.

Spomeňme ešte nejaké fakty, ktoré by pre vás mohli byť užitočné.

Tvrdenie 2.7. *Nech V je vektorový priestor nad poľom F. Potom B je báza priestoru V práve vtedy, keď pre každý vektor $\vec{v} \in V$ existujú jednoznačne (až na pridanie alebo odobratie nulových vektorov) určené $c_1, \dots, c_n \in F$ a $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n \in B$ také, že*

$$\vec{v} = c_1\vec{b}_1 + \dots + c_n\vec{b}_n.$$

Pod jednoznačnosťou až na pridatie alebo odbratie nulových vektorov rozumieme to, že takéto dve vyjadrenia nerozlišujeme:

$$c_1\vec{b}_1 + c_2\vec{b}_2 = c_1\vec{b}_1 + c_2\vec{b}_2 + 0\vec{b}_3.$$

Odhliadnuc od toho, že môžeme pridať koľkokoľvek členov, kde sú nulové koeficienty, je vyjadrenie vektora $\vec{v}$ určené jednoznačne.

Podobne ako v konečnorozmerných priestoroch, aj tu platí, že lineárne zobrazenie je jednoznačne určené obrazmi bázových vektorov.

Tvrdenie 2.8. *Nech V je vektorový priestor nad F a B je jeho báza. Nech W je vektorový priestor nad tým istým poľom F a $g\colon B \to W$ je ľubovoľné zobrazenie. Potom existuje práve jedno lineárne zobrazenie $f\colon V \to W$ také, že*

$$f(\vec{b}) = g(\vec{b})$$

pre každé $\vec{b} \in B$.

Zobrazenie $g\colon B \to W$ v predchádzajúcom tvrdení nám hovorí, ako sme predpísali obrazy bázových vektorov. Nimi je už jednoznačne určené lineárne zobrazenie $f\colon V \to W$.

Z tohoto výsledku vieme dostať, že:

Dôsledok 2.9. *Dva vektorové priestory V, W nad tým istým poľom F sú izomorfné, práve vtedy, keď majú rovnakú dimenziu.*

Porovnanie s konečnorozmerným prípadom. Oplatí sa vám zamyslieť nad tým, že v prípade konečnorozmerných priestorov sú to presne výsledky, ktoré poznáte z prednášky.

Poznámky k dôkazom. Dôkazy v tejto časti som vynechával. Aj tak k nim napíšem aspoň niečo.

Dôkaz vety 2.3, z ktorej dostaneme dôsledok 2.4, som vynechal preto, že sa s prváckymi vedomosťami naozaj nedá urobiť. Najčastejšie sa robí pomocou Zornovej lemy, o ktorej ste sa ešte neučilli.

Veta 2.5 by sa dala dokázať s tým, čo budete vedieť o kardinalite na konci tohoto semestra.

Dôkazy tvrdení 2.7 a 2.8 sú iba o čosi komplikovanejšie verzie analogických dôkazov, ktoré ste videli v konečnorozmernom prípade.