

## Návrat k sústavám lineárnych rovníc

Pri týchto úlohách sa oplatí trochu zamyslieť nad tým, či nejako súvisia s afinnými priestormi, o ktorých ste sa začali učiť na prednáške.

- Nájdite riešenie danej sústavy a zapíšte množinu riešení. Ako by vyzeralo riešenie príslušnej homogénnej sústavy? Aký je vzťah medzi týmito dvoma množinami?

$$\begin{array}{rcccccc}
 x_1 & -x_2 & & +x_4 & +x_5 & = & 2 & & x_1 & +x_2 & +3x_3 & +x_4 & +2x_5 & = & 3 \\
 x_1 & +2x_2 & +3x_3 & -x_4 & +4x_5 & = & -1 & & x_1 & -2x_2 & & +x_4 & -4x_5 & = & 0 \\
 x_1 & +3x_2 & +4x_3 & -x_4 & +5x_5 & = & -2 & & -x_1 & +x_2 & -x_3 & +x_4 & & = & 3 \\
 2x_1 & -5x_2 & -3x_3 & +2x_4 & -x_5 & = & 7 & & x_1 & +2x_2 & +4x_3 & +3x_4 & +2x_5 & = & 8
 \end{array}$$

- Aký je prienik množín riešení homogénnych systémov z predošlej úlohy? Aký je prienik množín riešení nehomogénnych systémov z predošlej úlohy?
- Nájdite dvojice premenných spomedzi  $x_1, x_2, \dots, x_5$ , ktoré môžu byť voľnými premennými v množine riešení homogénneho systému s maticou:

$$\begin{pmatrix} 7 & -4 & 9 & 2 & 2 \\ 5 & 8 & 7 & -4 & 2 \\ 3 & -8 & 5 & 4 & 2 \\ 7 & -2 & 2 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

## Determinanty

Chceli by sme zopakovať nejaké veci o determinantoch. (Determinanty sa nám budú počas tohoto semestra hodiť pri výpočte vlastných hodnôt a charakteristického polynómu matice.)

- Nech  $A$  je matica  $4 \times 4$ , ktorá obsahuje iba čísla  $\pm 1$ . Ukážte, že  $|A|$  je celočíselný násobok 8.
- Vedeli by ste nájsť maticu, ktorej determinant je  $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ ? Vedeli by ste pomocou determinantov odvodiť  $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz)$ ? Viete nájsť všetky reálne riešenia rovnice  $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 0$ ?

$$3. D_n = \begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & a+b & ab & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & a+b & ab & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a+b & ab \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & a+b \end{vmatrix} = ?$$

$$4. D_n = \begin{vmatrix} n & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & n & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 & 1 & n \end{vmatrix} = ?$$

- Vypočítajte determinant matice typu  $n \times n$

$$D_n = \begin{vmatrix} x & a & a & \dots & a \\ a & x & a & \dots & a \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a & \dots & a & x & a \\ a & \dots & a & a & x \end{vmatrix} = ?$$

(Teda ide o maticu, kde diagonálne prvky sú rovné  $x$  a všetky prvky mimo diagonály sú rovné  $a$ .)