## Krivky druhého rádu

Niečo o type krivky

$$ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2 + 2dx_1 + 2ex_2 + f \tag{1}$$

vieme zistiť z invariantov:

$$\delta = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \qquad \text{a} \qquad \Delta = \begin{vmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{vmatrix}$$

- $\delta > 0 \Rightarrow$ *eliptický typ*
- $\delta < 0 \Rightarrow$ *hyperbolický typ*
- $\delta = 0 \Rightarrow$ *parabolický typ*

Ak $\delta \neq 0$, tak otočením a posunutím môžeme previesť krivku do nových súradníc, v ktorých bude mať vyjadrenie

$$\lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0.$$

Nové súradnice sú orientované tak, že osi $z_{1,2}$ sú v smere vlastných vektorov k $\lambda_{1,2}$.

Pre $\delta \neq 0$ vieme nájsť *stred* kužeľosečky riešením sústavy rovníc

$$ax + by + d = 0,$$
$$bx + cy + e = 0.$$

1. [S, 540] Aký typ krivky predstavuje daná rovnica? Nájdite afinnú transformáciu, ktorou túto krivku môžeme previesť na kanonický tvar. Aký má táto krivka stred, osi?
   a) $5x_1^2 + 4x_1x_2 + 8x_2^2 - 32x_1 - 56x_2 + 80 = 0$;
   b) $5x_1^2 + 8x_1x_2 + 5x_2^2 - 18x_1 - 18x_2 + 9 = 0$
   c) $5x_1^2 + 6x_1x_2 + 5x_2^2 - 16x_1 - 16x_2 - 16 = 0$
   d) $12x_1x_2 + 5x_2^2 - 12x_1 - 22x_2 - 19 = 0$
   e) $7x_1^2 + 16x_1x_2 - 23x_2^2 - 14x_1 - 16x_2 - 218 = 0$
   f) $7x_1^2 - 24x_1x_2 - 38x_1 + 24x_2 + 175 = 0$
   g) $9x_1^2 + 24x_1x_2 + 16x_2^2 - 40x_1 - 30x_2 = 0$
   h) $x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 8x_1 + 4 = 0$
   i) $4x_1^2 - 4x_1x_2 + x_2^2 - 2x_1 - 14x_2 + 7 = 0$
2. [BPC, 9.4] Aký typ krivky predstavuje daná rovnica? Načrtnite ju.
   a) $2x_1^2 - 4x_1x_2 + 5x_2^2 + 8x_1 - 2x_2 + 9 = 0$
   b) $4x_1x_2 - 3x_2^2 - 4x_1 + 10x_2 - 6 = 0$
   c) $9x_1^2 - 24x_1x_2 + 16x_2^2 - 8x_1 + 19x_2 + 4 = 0$
   d) $x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 + x_1 + x_2 = 0$
   e) $x_1x_2 + 2x_1 + x_2 = 0$
   f) $x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 - 10x_1 - 6x_2 + 25 = 0$
   g) $5x_1^2 + 12x_1x_2 + 10x_2^2 - 6x_1 + 4x_2 - 1 = 0$
   h) $8x_1^2 + 34x_1x_2 + 8x_2^2 + 18x_1 - 18x_2 - 17 = 0$
   i) $25x_1^2 - 30x_1x_2 + 9x_2^2 + 68x_1 + 19 = 0$
   j) $8x_1^2 + 6x_1x_2 + 6x_1 + 3x_2 + 1 = 0$
   k) $4x_1^2 + 12x_1x_2 + 9x_2^2 - 8x_1 - 12x_2 - 5 = 0$
   l) $225x_1^2 - 240x_1x_2 + 64x_2^2 + 30x_1 - 16x_2 + 1 = 0$
   m) $x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 5x_1 - 5x_2 + 4 = 0$
   n) $5x_1^2 - 6x_1x_2 + 5x_2^2 + 2x_1 - 14x_2 + 13 = 0$
   o) $x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 + 8x_1 - 8x_2 + 22 = 0$
   p) $15x_1^2 + 24x_1x_2 + 15x_2^2 + 30x_1 - 24x_2 - 20 = 0$

q) $15x_1^2 - 16x_1x_2 - 15x_2^2 - 62x_1 - 44x_2 - 13 = 0$
Typ krivky by mal byť takýto: a) elipsa; b) hyperbola; c) parabola; d) elipsa; e) hyperbola; f) parabola; g) elipsa; h) hyperbola; i) parabola; j) dvojica pretínajúcich sa priamok; k) dvojica rovnobežných priamok; l) priamka; m) dvojica rovnobežných priamok; n) jediný bod; o) prázdna množina; p) prázdna množina; q) dvojica pretínajúcich sa priamok.

3. [R, s.54-55] Aký typ krivky predstavuje daná rovnica? Načrtnite ju.
a) $3x_1^2 + 10x_1x_2 + 3x_2^2 + 46x_1 + 34x_2 + 93 = 0$
b) $x_1^2 - 6x_1x_2 - 7x_2^2 - 16x_1 - 48x_2 - 88 = 0$
c) $4x_1^2 - 10x_1x_2 + 4x_2^2 + 6x_1 - 12x_2 - 9 = 0$
d) $3x_1^2 - 10x_1x_2 + 3x_2^2 + 8x_1 - 24x_2 - 8 = 0$
e) $6x_1^2 - 4x_1x_2 + 3x_2^2 + 20x_1 - 16x_2 - 198 = 0$
f) $5x_1^2 - 4x_1x_2 + 8x_2^2 - 18x_1 + 36x_2 - 279 = 0$
g) $3x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2 + 14x_1 + 20x_2 - 183 = 0$
h) $4x_1^2 - 4x_1x_2 + x_2^2 + 8\sqrt{5}x_1 + 6\sqrt{5}x_2 - 15 = 0$
i) $x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 - 6\sqrt{2}x_1 - 2\sqrt{2}x_2 - 6 = 0$
Typ krivky by mal byť takýto: a) – d) hyperbola; e) – g) elipsa; h) – i) parabola.

## Kvadratické formy

1. Nájdite maximálnu a minimálnu hodnotu danej funkcie na množine $M$. (Prípadne sa môžete pokúsiť nájsť aj v akom bode sa maximum a minimum nadobúda.)
a) $f(x,y) = x^2 + 2xy + 3y^2$; $M = \mathbb{R}^2$
b) $f(x,y) = xy$, $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1\}$;
c) $f(x,y) = x^2 + 4y^2$, $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1\}$;
d) $f(x,y) = x^2 + 2xy + 4y^2$, $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1\}$;
e) $f(x,y) = 2x^2 + 2xy + 2y^2$, $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1\}$;
f) $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_1$, $M = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4; x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1\}$ (Hint: Táto úloha sa dá riešiť pomocou kvadratických foriem. Možno však kratšie riešenie nájdete použitím Cauchy-Schwarzovej nerovnosti alebo niektorých iných nerovností, ktoré už poznáte.)
g) $f(x,y) = x^2 + y^2$, $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + 4y^2 = 1\}$;
h) $f(x,y) = x^2 + y^2$, $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; 3x^2 - 4xy + 3y^2 = 1\}$;

# Literatúra


[BPC] L. A. Beklemisheva, A. Yu. Petrovich, and I. A. Chubarov. *Sbornik zadach po analiticheskoj geometrii i lineinoi algere.* Fizmatlit, 2004.

[R] John W. Rutter. *Geometry of Curves.* Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, 2000.

[S] Yu. M. Smirnov. *Sbornik zadach po analiticheskoi geometrii i linejnoj algebre.* Golos, Moskva, 2005.