

## Duálny priestor

*Duálny priestor* k  $V$  je priestor  $V^*$  všetkých lineárnych zobrazení z  $V$  do  $R$ .

*Báza duálneho priestoru.* Ak máme bázu  $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_k$  priestoru  $V$ , tak za bázu duálneho priestoru  $V^*$  môžeme zobrať lineárne zobrazenia  $b_1^*, \dots, b_k^*$  jednoznačne určené podmienkami

$$b_i^*(\vec{b}_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{ak } i = j, \\ 0 & \text{ak } i \neq j. \end{cases}$$

*Kanonický izomorfizmus.* Zobrazenie  $\epsilon_V: V \rightarrow V^{**}$  určené ako „evaluácia“, t.j. pre  $\varphi \in V^*$  je

$$\epsilon_V(\varphi) = \varphi(\vec{v}),$$

je izomorfizmus medzi  $V$  a  $V^{**}$ .

*Duálne zobrazenie:* Pre lineárne zobrazenie  $f: V \rightarrow W$  je  $f^*: W^* \rightarrow V^*$  je určené predpisom  $f^*: \varphi \mapsto \varphi \circ f$ .

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ & \searrow & \swarrow \\ & \mathbb{R} & \end{array}$$

Ak  $f$  má maticu  $A$  vzhľadom na bázy  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n, \vec{w}_1, \dots, \vec{w}_k$ , tak  $f^*$  má vzhľadom na duálne bázy  $w_1^*, \dots, w_k^*, v_1^*, \dots, v_n^*$  maticu  $A^T$ .

1. Nech  $V, W, U$  sú vektorové priestory nad polom  $R$ . Dokážte nasledujúce tvrdenia:
  - a) Ak  $f, g: V \rightarrow W$  sú lineárne zobrazenia, tak  $(f + g)^* = f^* + g^*$ .
  - b) Ak  $f: V \rightarrow W$  je lineárne zobrazenie a  $c \in R$ , tak  $(cf)^* = cf^*$ .
  - c) Ak  $f: V \rightarrow W$  a  $g: W \rightarrow U$  sú lineárne zobrazenia, tak  $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$ .
  - d) Pre  $id_V: V \rightarrow V$  platí  $(id_V)^* = id_{V^*}$ .
  - e) Ak  $0: V \rightarrow W$  označuje nulové zobrazenie, tak  $0^*: W^* \rightarrow V^*$  je tiež nulové zobrazenie.
  - f) Ak  $f: V \rightarrow W$  je lineárne zobrazenie, tak platí

$$f^{**} \circ \epsilon_V = \epsilon_W \circ f.$$

Táto rovnosť vlastne hovorí, že ak priestor stotožníme s jeho druhým duálom prostredníctvom kanonického izomorfizmu  $\epsilon_V$  resp.  $\epsilon_W$ , tak zobrazenie  $f$  je „to isté“ ako zobrazenie  $f$ .

$$\begin{array}{ccc} V^{**} & \xrightarrow{f^{**}} & W^{**} \\ \epsilon_V \uparrow & & \uparrow \epsilon_W \\ V & \xrightarrow{f} & W \end{array}$$

- g) Nech navyše  $V$  je konečnorozmerný a má bázu  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ . Vieme potom, že  $v_1^*, \dots, v_n^*$  tvorí bázu priestoru  $V^*$  a  $v_1^{**}, \dots, v_n^{**}$  tvorí bázu priestoru  $V^{**}$ . Ukážte, že

$$\epsilon_V(\vec{v}_i) = v_i^{**}.$$

Toto tvrdenie vlastne hovorí, že kanonický izomorfizmus medzi  $V$  a  $V^{**}$  je presne lineárne zobrazenie jednoznačne určené tým, že  $v_i \mapsto v_i^{**}$ .

- h) Vedeli by ste napísať, akým maticovým rovnostiam týkajúcim sa transponovanej matice zodpovedajú niektoré z tvrdení, ktoré sme tu uviedli? Vedeli by ste pomocou tvrdenia g) zdôvodniť tvrdenie f) jednoduchším spôsobom v konečnorozmernom prípade?

2. Nech  $f: V \rightarrow W$  je lineárne zobrazenie medzi konečnorozmernými priestormi. Dokážte, že:

a)  $f$  je injektívne  $\Leftrightarrow f^*$  je surjektívne.

b)  $f$  je surjektívne  $\Leftrightarrow f^*$  je injektívne.

Vedeli by ste dokázať tieto tvrdenia aj bez použitia matice zobrazenia priamo z definície duálneho zobrazenia? Skúste sa pritom zamyslieť aj nad tým, na ktorých miestach využívame to, že  $V$  a  $W$  sú konečnorozmerné.

### Súčasná diagonalizácia\*

1. Nech pre matice  $A, B$  existuje regulárna matica  $P$  taká, že  $PAP^{-1} = D_1$  aj  $PBP^{-1} = D_2$  sú diagonálne matice. Ukážte, že  $AB = BA$ , t.j. matice  $A, B$  komutujú.

2\*. Zistite, či pre dané matice  $A, B$  existuje regulárna matica  $P$  taká, že  $PAP^{-1}$  aj  $PBP^{-1}$  sú diagonálne:

a)  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

b)  $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

c)  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$