Úloha 1. [K, 4121a] Nájdite všetky matice X typu 2×2 nad poľom $\mathbb{C}$ také, že

$$X^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Označme $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$. Štandardným postupom vieme nájsť Jordanov tvar a zistiť, že $PAP^{-1} = J$ pre

$$J = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Skôr než sa pustíme do samotného riešenia, pozrime sa na to, čo vieme povedať o Jordanovom tvare matice X.

Jordanov tvar matice X. Nech $PXP^{-1} = J$ pre nejakú regulárnu maticu P a maticu J, ktorá má Jordanov normálny tvar. Potom máme

$$PJ^2P^{-1} = A$$

teda matica A je podobná s maticou J^2.

Ak by J bola diagonálna, tak aj J^2 by bola diagonálna, čo znamená, že A by bola diagonalizovateľná.

Vieme, že tento prípad nenastane. Zostáva teda možnosť, že

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

pre nejaké λ.

Súčasne má platiť, že

$$J^2 = \begin{pmatrix} \lambda^2 & 2\lambda \\ 0 & \lambda^2 \end{pmatrix}$$

je podobná s maticou A. Potom ale nutne máme $\lambda^2 = 4$. (Musia sa zhodovať vlastné hodnoty.) Teda jediné možnosti pre λ sú ± 2.

Zistili sme, že Jordanov normálny tvar matice X vyhovujúcej zadanej rovnici musí byť niektorá z matíc

$$J_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad J_2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \tag{2}$$

(Prípad, že by jedna vlastná hodnota bola 2 a druhá -2 nastať nemôže, lebo vtedy by X bola diagonalizovateľná.) □

Môžeme sa skúsiť pozrieť, že či nevieme nájsť aspoň nejaké riešenia. (A až neskôr sa budeme trápiť s tým, či sú naozaj všetky.)

Nájdenie nejakých riešení. Možno by sme najprv mohli skúsiť nájsť také matice, ktorých druhá mocnina je $J = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$. Ak sa pozrieme na možné Jordanove tvary pre maticu X, ktoré sme našli v (2), tak ako vcelku zmysluplné tipy sa zdajú byť matice tvaru

$$Y_{1,2} = \begin{pmatrix} \pm 2 & a \\ 0 & \pm 2 \end{pmatrix}$$

Druhá mocnina takejto matice je presne

$$\begin{pmatrix} \pm 2 & a \\ 0 & \pm 2 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 4 & \pm 4a \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Z toho už vieme určiť, ako treba voliť a, tak aby druhá mocnina bola naozaj rovná J; t.j. chceme $\pm 4a = 1$. Dostaneme matice

$$Y_1 = \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{4} \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad Y_2 = \begin{pmatrix} -2 & -\frac{1}{4} \\ 0 & -2 \end{pmatrix},$$

čo sa dá stručnejšie zapísať ako

$$Y_{1,2} = \pm \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{4} \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ak už sme našli matice také, že $Y^2 = J$, tak potom pre $X = P^{-1}YP$ platí

$$X^2 = P^{-1}Y^2P = P^{-1}PJP = A.$$

Táto matica sa rovná

$$X = P^{-1}YP = \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{4} \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{4} \\ 2 & \frac{9}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} \frac{7}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{9}{4} \end{pmatrix} = \pm \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ -1 & 9 \end{pmatrix}.$$

Dostávame teda dve riešenia

$$X_{1,2} = \pm \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ -1 & 9 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

□

Skúška:

$$\begin{pmatrix} 7 & 1 \\ -1 & 9 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 48 & 16 \\ -16 & 80 \end{pmatrix} = 16 \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Našli sme teda skutočne nejaké dve riešenia rovnice (1). Treba sa ale ešte stále pýtať, či sú to všetky riešenia.

Riešenie. Ak $X^2 = A$ a súčasne $PAP^{-1} = J$, tak máme vlastne

$$PX^2P^{-1} = (PXP^{-1})^2 = J.$$

Stačí nám teda nájsť riešenia rovnice

$$Y^2 = J = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

(Z nich potom vieme dostať riešenia pôvodnej rovnice na základe rovnosti $PXP^{-1} = Y$, t.j. $P^{-1}YP = X$.)

Podarilo sa nám teda previesť pôvodný problém na o niečo jednoduchšiu úlohu. Všimnime si tiež, že aj o matici Y vieme povedať, že jej Jordanov tvar musí byť niektorá z matíc (2). (Na základe rovnakého argumentu ako pre X.) Teda vieme aj to, že $\chi_Y(x) = m_Y(x) = (x-2)^2$ alebo $\chi_Y(x) = m_Y(x) = (x+2)^2$.

Všimnime si ďalej, že

$$\begin{aligned} Y^2 &= \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \\ Y^2 - 4I &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ (Y-2I)(Y+2I) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Súčasne vieme (z toho, ako vyzerá minimálny polynóm pre Y), že buď $(Y-2I)^2 = 0$ alebo $(Y+2I)^2 = 0$.

Ak nastane prvá z uvedených možností, tak môžeme použitím $Y+2I=(Y-2I)+4I$ upraviť ľavú stranu predošlej rovnosti ako $(Y-2I)^2+4(Y-2I)=4(Y-2I)$, čo znamená, že

$$\begin{aligned}
4(Y-2I) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
Y-2I &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
Y &= \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{4} \\ 0 & 2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Zostáva nám druhý prípad, t.j. $(Y+2I)^2=0$. Môžeme postupovať úplne analogicky. Máme $Y-2I=(Y+2I)-4I$, z čoho dostaneme $(Y+2I)(Y-2I)=(Y+2I)^2-4(Y+2I)=-4(Y+2I)$. To vedie k rovnosti

$$\begin{aligned}
-4(Y+2I) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
Y+2I &= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
Y &= \begin{pmatrix} -2 & -\frac{1}{4} \\ 0 & -2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Zistili sme, že jediné dve riešenia (4) sú

$$Y_{1,2} = \pm \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{4} \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Z nich potom vieme dostať riešenia rovnice (1) presne rovnakým výpočtom ako v (3).

$$X_{1,2} = \pm \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ -1 & 9 \end{pmatrix}$$

□

Toto je podobné riešenie ako riešenie uvedené v článku [L] pri výpočte odmocniny *ľubovoľnej* matice 2×2. Pozri aj `https://en.wikipedia.org/wiki/Square_root_of_a_2_by_2_matrix`.

Riešenie. Pripomeňme, že vo všeobecnosti platí, že stopa matice je súčet jej vlastných hodnôt a determinant je súčin jej vlastných hodnôt.

Teda špeciálne ak X je matica 2×2 a jej vlastné hodnoty sú $\lambda_{1,2}$, tak dostávame pre charakteristický polynóm vyjadrenie:

$$\begin{aligned}
\chi_X(t) &= (t-\lambda_1)(t-\lambda_2) \\
&= t^2 - \operatorname{Tr}(X)t + \det(X).
\end{aligned}$$

Máme teda rovnosti

$$\begin{aligned}
\operatorname{Tr}(X) &= \lambda_1+\lambda_2 \\
\det(X) &= \lambda_1\lambda_2
\end{aligned}$$

Súčasne viem, že $A=X^2$ má vlastné hodnoty λ_1^2 a λ_2^2. Teda potom máme:

$$\begin{aligned}
\det(A) &= (\lambda_1\lambda_2)^2 \\
\operatorname{Tr}(A) &= \lambda_1^2+\lambda_2^2 = (\lambda_1+\lambda_2)^2 - 2\lambda_1\lambda_2
\end{aligned}$$

čo znamená, že

$$\det(A) = \det(X)^2$$
$$\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(X)^2 - 2\det(X)$$

To, čo sme odvodili doteraz, platí pre ľubovoľné matice 2×2 také, že $X^2 = A$. V našom prípade máme $\mathrm{Tr}(A) = 8$ a $\det(A) = 16$. Dostávame teda, že

$$\det(X)^2 = 16$$
$$\mathrm{Tr}(X)^2 - 2\det(X) = 8$$

To znamená, že možné hodnoty determinantu sú $\det(X) = \pm 4$. Ak už máme hodnotu $\det(X)$, tak z druhej rovnice dostaneme možné hodnoty pre $\mathrm{Tr}(X)$, pretože $\mathrm{Tr}(X)^2 = 8 + 2\det(X)$.

Ak $\det(X) = -4$, tak dostaneme $\mathrm{Tr}(X) = 0$. To by znamenalo, že $\chi_X(t) = t^2 - 4$ a potom platí

$$X^2 - 4I = 0$$

čiže $X^2 = 4I$ a X nie je riešenie rovnice $X^2 = A$.

Zostáva nám možnosť, že $\det(X) = 4$. Vtedy dostaneme $\mathrm{Tr}(X) = \pm 4$, čiže $\chi_X(t) = t^2 \pm 4t + 4I$. Teda podľa Cayley-Hamiltonovej vety musí potom pre maticu X platiť

$$X^2 \pm 4X + 4I = 0$$
$$A \pm 4X + 4I = 0$$
$$X = \pm\frac{1}{4}(A + 4I)$$

$\square$

Všimnime si, že ak sme vedeli nejako odôvodniť vyzerá Jordanov tvar pre X – pozri (2) – tak z toho vieme aj ako vyzerá charakteristický polynóm $\chi_X(t)$. Takže z toho sa vieme hneď dostať k rovnosti $X^2 \pm 4X + 4I = 0$. V predošlom riešení sme si ukázali, že tvar charakteristického polynómu vieme odvodiť aj bez použita možných Jordanových tvarov z (2).

Ešte to môžeme vyskúšať takým spôsobom, že nájdeme vlastne všetky možnosti pre maticu prechodu medzi maticou X a jej Jordanovým tvarom.

Riešenie. Z Jordanovho tvaru matica A vieme prísť nato, že možný Jordanov tvar pre X je (2)

$$J_{1,2} = \begin{pmatrix} \pm 2 & 1 \\ 0 & \pm 2 \end{pmatrix}$$

Pre jednoduchosť sa zaoberajme iba prípadom J_1. (Ak J_1 je Jordanov tvar matice X, tak matica $-X$ má Jordanov tvar J_2 a navyše platí $(-X)^2 = X^2$. Čiže ak takto stratíme nejaké riešenia, môžeme ich doplniť jednoducho pridaním opačného znamienka.)

Vieme teda, že pre nejakú regulárnu maticu P platí

$$PXP^{-1} = J_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$
$$PAP^{-1} = (PXP^{-1})^2 = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Ak poznáme maticu A, vedeli by sme nájsť všetky možnosti pre maticu P? Môžeme použiť podobné úvahy ako pri hľadaní matice prechodu pre Jordanov tvar. Konkrétne ak si označíme riadky matice P ako

$$P = \begin{pmatrix} \vec{\alpha} \\ \vec{\beta} \end{pmatrix},$$

tak $\vec{\beta}$ musí byť vlastný vektor matice A k vlastnému číslu 4. Teda $\vec{\beta} \in [(-1,1)]$. Súčasne to musí byť nejaký nenulový násobok vektora $(-1,1)$. (Matica P je regulárna a teda nemôže obsahovať nulový riadok.)

Zatiaľ sme teda zistili, že

$$\vec{\beta} = b(-1,1)$$

pre nejaké $b \neq 0$. Súčasne pre $\vec{\alpha}$ má platí $\vec{\alpha}A = 4\vec{\alpha} + \vec{\beta}$, t.j.

$$\vec{\alpha}(A-4I) = \vec{\beta}.$$

Toto je vlastne nehomogénna sústava rovníc. Jedno jej riešenie je $b(4,0)$. Ak pripočítame ľubovoľné riešenie homogénnej sústavy, tak dostaneme všetky riešenia. Zistili sme, že

$$\vec{\beta} = b(4,0) + c(-1,1).$$

To nám dá vyjadrenie pre maticu P v tvare $P = \begin{pmatrix} 4b-c & c \\ -b & b \end{pmatrix}$.

Ak využijeme, že $b \neq 0$ a označíme $t = \frac{c}{b}$, tak môžeme vyjadrenie matice P trochu zjednodušiť.

$$P = \begin{pmatrix} 4b-c & c \\ -b & b \end{pmatrix} = b\begin{pmatrix} 4-t & t \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Zistili sme teda ako vyzerajú všetky možnosti pre maticu P.

Pre maticu 2×2 je ľahké vyrátať aj inverznú:

$$P^{-1} = \frac{1}{4b}\begin{pmatrix} 1 & -t \\ 1 & 4-t \end{pmatrix}$$

Teraz už zostáva použiť to, že $PXP^{-1} = J_1$, čiže $X = P^{-1}J_1P$.

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -t \\ 1 & 4-t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4-t & t \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -t \\ 1 & 4-t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7-2t & 2t+1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ -1 & 9 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

□

Vedeli by sme tento problém vyriešiť aj „hrubou silou“ – tak že sa pozeráme na sústavu rovníc $X^2 = A$, kde čísla v matici A berieme ako neznáme? (Inak povedané, toto je také stredoškolské riešenie – nepoužívame nič okrem definície násobenia matíc.)

Riešenie. Ak označíme

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$$

tak rovnica $X^2 = A$ vlastne znamená, že:

$$\begin{aligned} x_{11}^2 + x_{12}x_{21} &= 3 &(5)\\ x_{11}x_{12} + x_{12}x_{22} &= 1 &(6)\\ x_{11}x_{21} + x_{21}x_{22} &= -1 &(7)\\ x_{12}x_{21} + x_{22}^2 &= 5 &(8) \end{aligned}$$

Druhá a tretia rovnica sa dajú prepísať v tvare $(x_{11}+x_{22})x_{12} = 1$ a $(x_{11}+x_{22})x_{21} = -1$. Ich vydelením dostaneme

$$\frac{x_{12}}{x_{21}} = -1 \qquad \Longrightarrow \qquad x_{12} = -x_{21}.$$

Teraz môžeme uvedené tri rovnice prepísať ako

$$x_{11}^2 - x_{21}^2 = 3 \tag{9}$$
$$(x_{11} + x_{22})x_{21} = -1 \tag{10}$$
$$x_{22}^2 - x_{21}^2 = 5 \tag{11}$$

Ak odčítame rovnice (9) a (10), tak máme

$$-2 = x_{11}^2 - x_{22}^2 = (x_{11} - x_{22})(x_{11} + x_{22}) \overset{(10)}{=} -\frac{x_{11} - x_{22}}{x_{21}}$$
$$x_{11} - x_{22} = 2x_{21}$$
$$x_{11} + x_{22} = -\frac{1}{x_{21}}$$

Z posledných dvoch rovníc vieme vyjadriť

$$x_{11} = x_{21} - \frac{1}{2x_{21}}$$
$$x_{22} = x_{21} + \frac{1}{2x_{21}}$$

Dostaneme potom

$$x_{11}^2 - x_{21}^2 = \left(x_{21} - \frac{1}{2x_{21}}\right)^2 - x_{21}^2 = -1 + \frac{1}{4x_{21}^2} = 3$$

čiže $\frac{1}{4x_{21}^2} = 4$ a $x_{21}^2 = \frac{1}{16}$, čo nám dá

$$x_{21} = \pm\frac{1}{4}.$$

Ak poznáme hodnotu x_{21}, tak pomocou vyššie uvedených rovností už vieme dopočítať x_{12}, x_{11} aj x_{22}. $\square$

Literatúra

[K] A. I. Kostrikin. *Exercises in Algebra: A collection of Exercises in Algebra, Linear Algebra and Geometry.* OPA, Amsterdam, 1996.

[L] Bernard W. Levinger. The square root of a 2 × 2 matrix. *Math. Mag.*, 53(4):222–224, 1980.