

D.Ú.-sada 4

1. Dokážte, že ak $2^n + 1$ je prvočíslo, tak n je mocnina 2.
2. Nájdite 5 po sebe idúcich prirodzených čísel takých, že prvé z nich je párne, ďalšie je deliteľné 3, tretie je deliteľné 5, štvrté je deliteľné 7 a piate je deliteľné 11.
3. Dokážte, že pre ľubovoľné celé čísla p, q je $p^5q - pq^5$ deliteľné 5.
4. Zistite, či sú riešiteľné kongruencie a) $x^2 \equiv 3 \pmod{31}$, b) $x^2 \equiv 5 \pmod{31}$, c) $x^2 \equiv 631 \pmod{1093}$.
5. Dokážte, že 5 je kvadratický zvyšok pre prvočísla tvaru $10k \pm 1$ a kvadratický nezvyšok pre prvočísla tvaru $10k \pm 3$.