

### D.Ú.-sada 13

1. Dokážte, že súčin  $n$  po sebe idúcich prirodzených čísel je deliteľný číslom  $n!$ .
2. Dokážte, že prirodzené číslo  $n > 1$ , ktorého desiatkový zápis pozostáva zo samých jednotiek, nemôže byť štvorcom prirodzeného čísla.
3. Dokážte, že  $\frac{n}{\varphi(n)} = \sum_{d|n} \frac{\mu^2(d)}{\varphi(d)}$ .
4. Zistite, či sú riešiteľné kongruencie a)  $x^2 \equiv 3 \pmod{31}$ , b)  $x^2 \equiv 5 \pmod{31}$ , c)  $x^2 \equiv 631 \pmod{1093}$ .
5. Dokážte, že 5 je kvadratický zvyšok pre prvočísla tvaru  $10k \pm 1$  a kvadratický nezvyšok pre prvočísla tvaru  $10k \pm 3$ .