

Z nasledujúcich štyroch otázok si vyberte tri, ktoré budete riešiť. Za každú z nich máte možnosť získať maximálne 25 bodov.

- Vyslovte Čebyševove nerovnosti. Ak viete, že pre číslo $d_n = [1, 2, \dots, n]$ platí odhad $d_n \geq 2^{n-2}$, dokážte, že $\pi(n) \geq \frac{n-2}{\lg n}$.
- Dokážte, že rad $\sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{p}$ diverguje.
- Riešte lineárne kongruencie: a) $25x \equiv 4 \pmod{11}$; b) $16x \equiv 4 \pmod{12}$; c) $16x \equiv 4 \pmod{13}$.
- Dokážte, že $\prod_{t|n} t = n^{d(n)/2}$.

Z nasledujúcich štyroch otázok si vyberte tri, ktoré budete riešiť. Za každú z nich máte možnosť získať maximálne 25 bodov.

- Dokážte, že $\sum_{d|n} \varphi(d) = n$.
- Ako môžeme vyjadriť Eulerovu funkciu pomocou prvočíselného rozkladu? Dokážte!
- Ako N_n označme číslo, ktorého zápis v desiatkovej sústave pozostáva z n jednotiek, (teda $N_n = 10^0 + 10^1 + \dots + 10^{n-1}$). Dokážte, že $N_n \mid N_m$ práve vtedy, keď $n \mid m$.
- Dokážte, že ak $p = 4k + 1$, tak $\sum_{a=1}^{p-1} a \left(\frac{a}{p}\right) = 0$ a $\sum_{\substack{a=1 \\ (a|p)=1}}^{p-1} a = \frac{p(p-1)}{4}$.